高等院校教材

水力学

下册

李家星
赵振兴 主编





河海大学出版社

责任编辑　吴毅文
责任校对　李　恬
封面设计　叶　兵



ISBN 7-5630-1558-2
9 787563 015580 >

ISBN 7－5630－1558－2/TV·193
定价:32.00 元(共二册)

水力学

（下册）

主　编　李家星　赵振兴

编著者（以姓氏笔画为序）

王培莉　王新宏　戎红玉　李家星
陈水佛　陈立德　吴如潍　张良然
赵振兴　钱善琪　谢佩珍　薛朝阳

河海大学出版社

内容简介

本书按原国家教育委员会高等教育司制定的《水力学课程教学基本要求》编写，分为基础水力学（上册）和专门水力学（下册）两部分。

本书主要作为高等院校水利类、土建类各专业本科和专科教材，也可供有关工程技术人员参考。

图书在版编目（CIP）数据

水力学/李家星，赵振兴主编．—2版．—南京：河海大学出版社，2001.1

ISBN 7-5630-1558-2

Ⅰ.水… Ⅱ.①李…②赵… Ⅲ.水力学-高等学校-教材 Ⅳ.TV13

中国版本图书馆CIP数据核字（2000）第78212号

书　　名／水力学（下册）

书　　号／ISBN 7-5630-1558-2/TV·193

责任编辑／吴毅文

责任校对／李　浩

封面设计／叶　兵

出　　版／河海大学出版社

地　　址／南京西康路1号（邮编：210098）

电　　话／（025）3737852（总编室）　（025）3722833（发行部）

印　　刷／南京京新印刷厂

开　　本／850毫米×1168毫米　1/32　10.5印张　插页1　284千字

版　　次／2001年1月第2版　2001年1月第2次印刷

印　　数／6001～12000册

定　　价／32.00元（共二册）

目　　录

第十章　堰流和闸孔出流 …… (1)
　第一节　概述 …… (1)
　第二节　堰的分类 …… (2)
　第三节　堰流的基本公式 …… (4)
　第四节　薄壁堰 …… (6)
　第五节　实用堰 …… (11)
　第六节　宽顶堰 …… (20)
　第七节　闸孔出流 …… (28)
　第八节　水工建筑物测流简介 …… (35)
　第九节　测流堰槽简介 …… (37)
　习　题 …… (44)
第十一章　泄水建筑物下游水流的衔接和消能 …… (47)
　第一节　概述 …… (47)
　第二节　底流消能 …… (49)
　第三节　挑流消能 …… (66)
　第四节　面流消能 …… (71)
　习　题 …… (80)
第十二章　渗流 …… (81)
　第一节　概述 …… (81)
　第二节　土壤的分类,渗流模型 …… (81)
　第三节　达西定律 …… (84)
　第四节　恒定无压渗流 …… (88)
　第五节　井的渗流 …… (98)
　第六节　土坝渗流 …… (105)

第七节　渗流的基本微分方程，渗流的流速势函数 …（112）
第八节　恒定平面渗流的流网解法 ……（118）
习　题 ……（128）
第十三章　有压管道非恒定流 ……（132）
第一节　概述 ……（132）
第二节　水击现象及水击分类 ……（132）
第三节　直接水击压强和水击波速 ……（138）
第四节　一元非恒定流基本方程 ……（143）
第五节　水击基本方程 ……（147）
第六节　简单管道水击压强计算 ……（154）
第七节　调压系统非恒定流 ……（162）
习　题 ……（166）
第十四章　明渠非恒定流 ……（168）
第一节　概述 ……（168）
第二节　明渠非恒定渐变流的基本方程——圣维南方程组 ……（171）
第三节　特征线法 ……（179）
第四节　直接差分法 ……（188）
第五节　明渠非恒定急变流——断波 ……（200）
第十五章　水工建筑物的高速水流简介 ……（207）
第一节　概述 ……（207）
第二节　运动要素的数据处理 ……（208）
第三节　水工建筑物的空蚀 ……（212）
第四节　掺气水流简介 ……（216）
习　题 ……（219）
第十六章　挟沙水流基础 ……（220）
第一节　概述 ……（220）
第二节　浑水的特性 ……（220）
第三节　泥沙的沉速 ……（224）

第四节　推移质运动 …… (229)
第五节　悬移质运动 …… (239)
习　题 …… (247)
第十七章　波浪理论基础 …… (249)
第一节　概述 …… (249)
第二节　风成波的发生、发展和消失及其行近岸滩时的变化 …… (251)
第三节　拉格朗日连续方程和运动方程 …… (254)
第四节　有限振幅推进波 …… (260)
第五节　有限振幅立波 …… (285)
习　题 …… (302)
第十八章　水力模型试验基本原理 …… (304)
第一节　概述 …… (304)
第二节　量纲分析法 …… (304)
第三节　水力相似基本原理 …… (312)
第四节　相似原理的应用及水力模型设计 …… (320)
第五节　水力模型的分类 …… (325)
习　题 …… (327)
参考答案 …… (329)
附　录
5. 矩形断面底流消能水力计算求解图

第十章　堰流和闸孔出流

第一节　概　　述

在水利工程中，为了考虑防洪、灌溉、发电等综合要求，常兴建溢流坝和水闸以控制和调节流量。在水力学中，把顶部溢流的水工建筑物称为堰。因此，溢流坝和水闸坎顶就是堰。流经堰的水流，当没有受到闸门控制时就是堰流；当受到闸门控制时就是闸孔出流，简称孔流。

堰流和闸孔出流的水力计算在水利工程中应用十分广泛。在水工设计中，是根据堰闸的形式、上下游水位和堰闸过水能力之间的关系来设计堰闸；而在水文测验中，则是根据已建成的水工建筑物来施测流量，称为水工建筑物测流；此外，还有专门为了量水（测流）而建造的测流堰或测流槽，利用它们来测流时，称为量水建筑物测流或称为堰槽测流。

堰流和闸孔出流（简称堰、闸出流）都有自由出流和淹没出流（又称沉溺出流）之分。当下游水位不影响堰、闸的泄流量时为自由出流；反之，当下游水位影响堰、闸的泄流量时为淹没出流。这里，再从缓流到急流的过度来分析自由出流和淹没出流。一般来说，由于堰、闸的阻遏，其上游来流为缓流。通过堰、闸的水流，在自由出流状态下，能保持着从上游缓流到下游急流的过渡，由于急流的干扰不能向上游传播，堰、闸的泄流量就只与上游水位有关，下游（急流）水位的变化不会影响到堰、闸的泄流量。而淹没出流，是缓流（堰、闸上游的缓流）到缓流（堰、闸下游的缓流）的过渡，由于缓流的干扰可以向上游传播，所以下游水位的变化就会影响到堰、闸的泄流量；或者说，淹没出流的泄流量与上、下游水位均有

关。

堰、闸水力计算的共同特点是:由于流线在较短的范围内急剧变化,是急变流,所以能量损失以局部损失为主。

第二节　堰的分类

堰的形式和用途各异。然而,在水力计算中,并不是按堰的用途,而是按堰壁厚度与水头的相对大小,实质上是按堰的水力特性,将堰分为薄壁堰、实用堰和宽顶堰三类。图 10.1 是这三类堰的纵剖面图。图中上游渐变流断面处的水面到堰顶的高差称为堰上水头,以 H 表示。H 一般在距堰上游面(3～4)H 处量测,该量测断面可视为渐变流断面。堰顶厚度以 δ 表示。

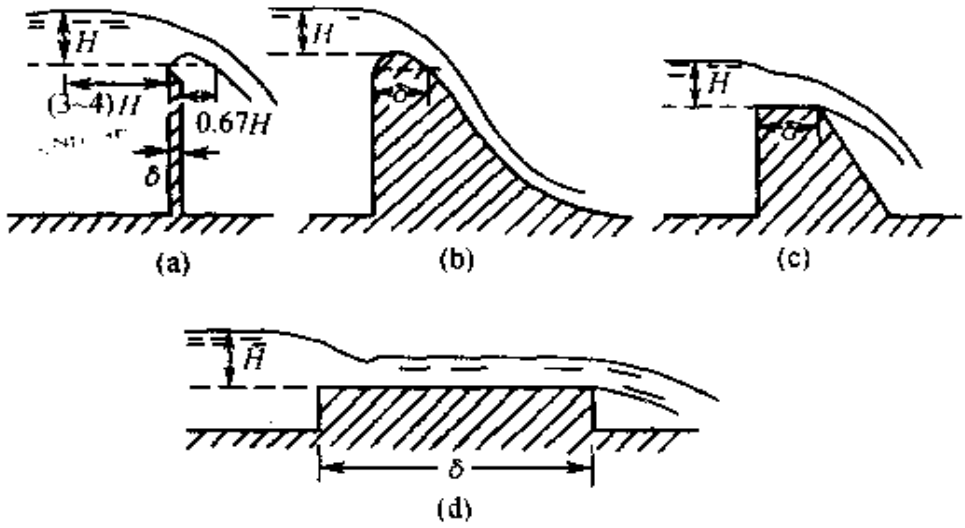


图 10.1

一、薄壁堰

当水流趋向薄壁堰壁时,堰顶下泄的水流形如舌状,如图 10.1(a)所示。当堰壁的厚度 δ 较小,堰壁没有触及到水舌的下缘,其厚度 δ 对水舌形状没有影响时,这种堰称为薄壁堰或称锐缘堰。根据实验,堰顶至水舌下缘之间的水平距离约为 $0.67H$,故在设计中,把 $\delta < 0.67H(\delta/H < 0.67)$的堰称为薄壁堰。

二、实用堰

当堰壁厚度影响到水舌的形状，水流即受到堰顶的阻力。把 $0.67H < \delta < 2.5H(0.67 < \delta/H < 2.5)$ 的堰称为实用堰。为了减少水流的阻力，某些大型的溢流坝，其剖面形状常做成曲线形，使堰面形状尽量与水舌相吻合，以减少阻力，称为曲线型实用堰，如图 10.1(b)所示。某些小型的水利工程，为了施工方便，常采用折线型实用堰剖面，如图 10.1(c)所示。

三、宽顶堰

根据实验，当 $\delta > 2.5H$ 以后，堰顶厚度对水流的影响使水流在堰进口附近的堰顶上有收缩现象。当 $\delta > 4H$ 以后，在收缩断面以后还可以在堰上出现近似水平的流段，如图 10.1(a)所示。而当 $\delta > 10H$ 以后，堰顶的沿程水头损失已不能忽略不计，需按明渠理论计算。因此，把 $2.5H < \delta < 10H(2.5 < \delta/H < 10)$ 的堰称为宽顶堰。

以上分类是从水力学角度进行分类的。例如，对于一定的堰顶厚度 δ，当水头 H 不同时，可以是实用堰，也可以是宽顶堰。

按堰壁厚度分类是古老而典型的分类，延用至今。随着生产的需要，新堰型不断涌现，如量水用的三角剖面堰、平坦 V 形堰等，它们并不明显地属于上述那一类，可不必追究它们的类别，以弄清它们的水流特点及计算公式为要求。

此外，对每一种堰，除了可以分为自由出流和淹没出流以外，又可以分为有侧收缩堰(溢流宽度小于上游渠道的宽度)和无侧收缩堰。并按堰顶轴线在平面上的位置分为正堰(堰顶轴线与水流方向垂直)、斜堰和侧堰(堰顶轴线与水流方向平行)等。以下阐述限于正堰。

第三节　堰流的基本公式

堰流的基本公式是指矩形薄壁堰、实用堰和宽顶堰均适用的普遍流量公式。

今以矩形薄壁堰自由出流为例推导如下。如图 10.2 所示，通

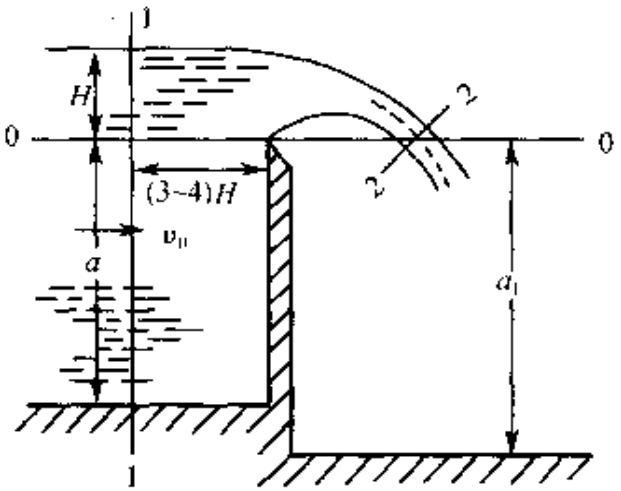


图 10.2

过堰顶取基准面 0－0。在堰上游(3～4)H 处取渐变流断面 1。过基准面与水舌中线的交点取过水断面 2。据试验，断面 2 为渐变流断面。对断面 1,2 列能量方程：

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + h_w$$

式中 $z_1 + \dfrac{p_1}{\rho g} = H$；$\alpha_1 = \alpha_0$；$v_1 = v_0$，$v_0$ 为行近流速；令 $H + \dfrac{\alpha_0 v_0^2}{2g} = H_0$ 为堰上总水头；断面 2 中点位于基准面上，$z_2 = 0$；水舌上、下表面与大气接触，可令 $p_2 = 0$；$\alpha_2 = \alpha$；$v_2 = v$；再取 $h_w = \zeta \dfrac{v^2}{2g}$，$\zeta$ 为堰的局部水头损失系数。将以上关系代入能量方程得

$$H_0 = \frac{\alpha v^2}{2g} + \zeta \frac{v^2}{2g}$$

整理得

$$v = \frac{1}{\sqrt{\alpha + \zeta}} \sqrt{2gH_0} = \varphi \sqrt{2gH_0}$$

式中 $\varphi = \frac{1}{\sqrt{\alpha + \zeta}}$ 称为流速系数。由于动能校正系数 α 和局部水头损失系数 ζ 之和总是大于 1，故 $\varphi < 1$。

设断面 2 的水舌厚度为 kH_0，k 为与水舌垂向收缩情况有关的系数，而溢流宽度为 B，则过水断面 2 的面积 $A = kH_0B$。通过堰的流量为

$$Q = Av = kH_0Bv = \frac{k}{\sqrt{\alpha + \zeta}} B \sqrt{2g} H_0^{\frac{3}{2}}$$

令

$$m = \frac{k}{\sqrt{\alpha + \zeta}}$$

则

$$Q = mB \sqrt{2g} H_0^{\frac{3}{2}} \tag{10.1}$$

上式中 m 称为流量系数。

以上推导时没有考虑下游水位的淹没影响及侧收缩的影响。由于这两种影响均使过堰流量减少，所以，如若把这两种影响也反映到公式中来，那就要再乘以淹没系数 σ 及侧收缩系数 ε。淹没出流时 $\sigma < 1.0$，有侧收缩时 $\varepsilon < 1.0$；当不淹没和无侧收缩时均等于 1。于是上式成为

$$Q = \sigma \varepsilon mB \sqrt{2g} H_0^{3/2} \tag{10.2}$$

这就是堰流的普遍公式。虽然是就薄壁堰推导而得，但仍不失其普遍性，因为三种堰的物理本质并无差异，其间的差别仅体现在流量系数 m、淹没系数 σ、侧收缩系数 ε 的确定方法及数值上。例如流量系数 m，由推导过程可见，m 与堰的形式、水舌的收缩程度、断面 2 的流速分布以及堰的水头损失等因素有关，但实用时并不是按 $m = k/\sqrt{\alpha + \zeta}$ 来计算流量系数 m，因为其中 α，ζ，k 均是未知数，与其分别测定 α，ζ，k，不如根据式(10.1)实测 Q，H，直接分析 m 的变化规律。根据实验，人们已建立了许多流量系数的经验

公式。在经验公式中往往选用上游堰高 a、水头 H(对于淹没情况还要考虑下游堰高 a_1 和水位差 z 等),或它们的比值$\frac{H}{a}$作为变量,来反映流量系数 m 的变化规律。例如在相同的水头 H 下,堰高 a 不同时,堰前水流的收缩程度也不同,所以比值$\frac{H}{a}$可以反映水舌的收缩程度,等。

由于建立各个经验公式的条件不同,因此在初步计算中按不同的经验公式得到的流量系数值往往有出入,仅可作为设计时的参考,对于重要工程,应进行模型试验。此外,由于确定各种系数的经验公式及表格甚多,不可能,也无需一一罗列,仅选择一、二,用以阐明各种系数的影响因素。其他公式可查阅有关专著或手册。

第四节　薄壁堰

薄壁堰相对于实用堰和宽顶堰而言,具有测流精度较高的优点,但由于堰壁较薄,难以承受过大的水压力,上游水头不宜过大,故常作为实验室和小型渠道量测流量之用。

薄壁堰的堰口形状有矩形、三角形、梯形等,如图 10.3 所示,分别称为矩形薄壁堰、三角形薄壁堰和梯形薄壁堰。

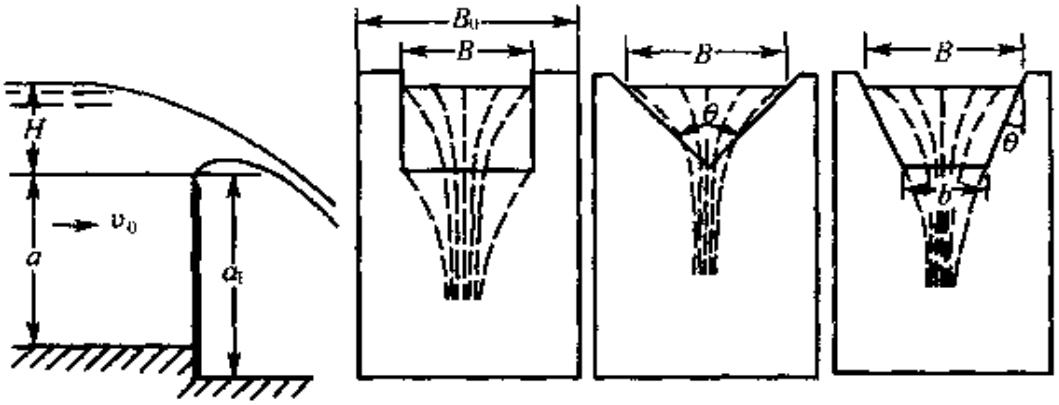


图 10.3

一、矩形薄壁堰

(一)流量系数

薄壁堰堰壁厚度不影响水舌形状,水头相对不大,且上游渠道一般建造的比较规则,为简便计,在公式(10.1)中,用水头 H 代替 H_0,而把 $\frac{\alpha_0 v_0^2}{2g}$ 的影响并入流量系数中考虑。于是式(10.1)改写为

$$Q = m_0 B \sqrt{2g} H^{3/2} \tag{10.3}$$

式中 m_0 是包括行近流速影响在内的流量系数,也称为流量系数。

矩形薄壁堰的流量系数 m_0 在自由流和无侧收缩的情况下可按以下经验公式计算。

巴辛(Bazin)公式

$$m_0 = (0.405 + \frac{0.0027}{H})\left[1 + 0.55(\frac{H}{H+a})^2\right] \tag{10.4}$$

此式适用条件为 $0.2\text{m} < a < 1.13\text{m}$, $B < 2\text{m}$, $0.1\text{m} < H < 1.24\text{m}$。

雷保克(T·Rehbock)公式

$$m_0 = 0.4034 + 0.0534\frac{H}{a} + \frac{1}{1610H - 4.5} \tag{10.5}$$

此式适用条件为 $0.15\text{m} < a < 1.22\text{m}$, $H < 4a$。

在应用以上各式时,水舌下面为大气压强(即 $p_2 = 0$)。一般可设通气管与大气相通,否则,会因为水舌下部的部分空气被带走而出现负压。负压虽然可以增加有效水头,从而加大流量,但负压值不稳定,并使水舌上下摆动,因而影响测流精度。

薄壁堰有侧收缩时通常不单独计算侧收缩系数,而是将其影响并入到流量系数 m_0 中去考虑,例如巴辛公式:

$$m_0 = \left[0.405 + \frac{0.0027}{H} - 0.03\frac{B_0 - B}{B_0}\right] \cdot \left[1 + 0.55(\frac{H}{H+a})^2(\frac{B}{B_0})^2\right] \tag{10.6}$$

式中 B_0 为渠宽,B 为堰顶宽(垂直于流向),B_0 及 B 均以 m 计。

(二)淹没系数

当下游水位影响堰的泄流量时为淹没出流。薄壁堰发生淹没出流的条件是:①下游水位高于堰顶;②堰下游发生淹没水跃。如图 10.4 所示。因为只满足其中任一个条件,都有可能在堰的下游发生临界水跃或远离水跃,以致使下游收缩断面处于急流状态,并使泄流时的流态仍然为自由出流。

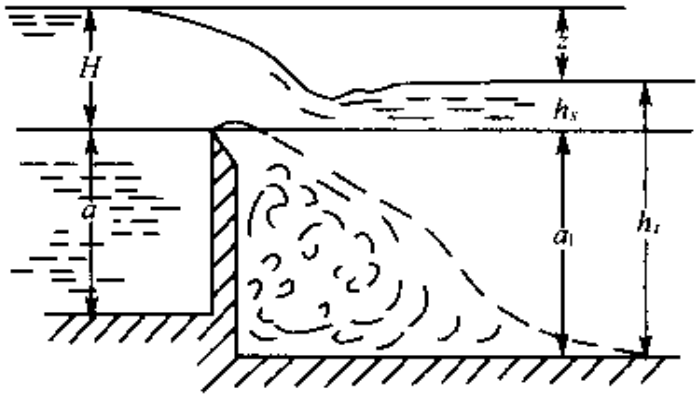


图 10.4

根据实验发生淹没水跃的经验关系是

$$\frac{z}{a_1} < \left(\frac{z}{a_1}\right)_c \tag{10.7}$$

上式中临界值$\left(\frac{z}{a_1}\right)_c$与$\frac{H}{a_1}$的经验关系如图 10.5 所示。由图可见,$(z/a_1)_c$ 在 0.7 上下变化。

以上各符号的意义可参见图 10.4,其中 z 为上、下游水位差,a_1 为下游堰高,H 为上游水头。

矩形薄壁堰淹没出流的流量公式为

$$Q = \sigma m_0 B \sqrt{2g} H^{3/2} \tag{10.8}$$

式中 σ 为淹没系数,可用以下经验公式计算:

$$\sigma = 1.05\left(1 + 0.2\frac{h_s}{a_1}\right)\sqrt[3]{\frac{z}{H}} \tag{10.9}$$

式中 h_s 为下游水位高于堰顶的数值。淹没出流时 $h_s > 0$,如图

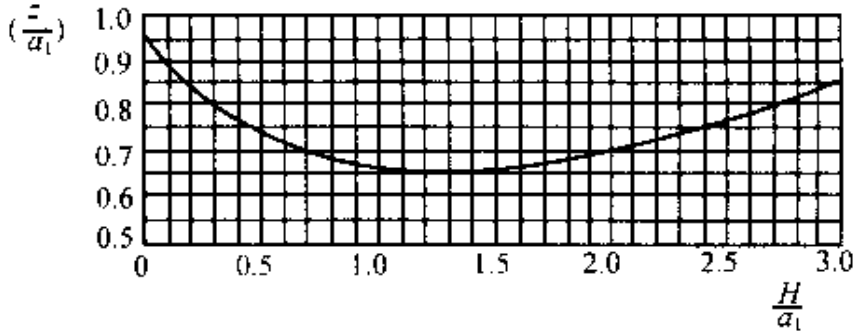


图 10.5

10.4 所示。

需要说明的是，淹没出流的测流精度较自由出流为低。作为测流设备，在设计时，应尽量避免在淹没条件下工作。

例 10.1 有一矩形无侧收缩薄壁堰，已知堰宽 $B = 0.5$ m，上、下游堰高 $a = a_1 = 0.5$ m，堰上水头 $H = 0.2$ m，求下游水深分别为 $h_t = 0.4$ m 及 $h_t = 0.6$ m 时通过薄壁堰的流量。

解： (1)求 $h_t = 0.4$ m 时的流量。$h_t(=0.4\text{ m}) < a_1(=0.5\text{ m})$，下游水位低于堰顶，为自由出流。按式(10.5)和式(10.3)分别计算 m_0 及 Q：

$$m_0 = 0.4034 + 0.0534\frac{H}{a} + \frac{1}{1610H - 4.5}$$

$$= 0.4034 + 0.0534\frac{0.2\text{ m}}{0.5\text{ m}} + \frac{1}{1610 \times 0.2 - 4.5} = 0.428$$

$$Q = m_0 B\sqrt{2g}H^{3/2} = 0.428 \times 0.5\text{ m} \times \sqrt{2 \times 9.81\text{ m/s}^2} \times (0.2\text{m})^{3/2}$$

$$= 0.0848\text{ m}^3/\text{s}$$

(2)求 $h_t = 0.6$ m 时的流量。判别出流是否淹没：$h_t(=0.6\text{ m}) > a_1(=0.5\text{ m})$，下游水位高于堰顶。又，$\frac{z}{a_1} = \frac{a_1 + H - h_t}{a_1} = \frac{0.5\text{ m} + 0.2\text{ m} - 0.6\text{ m}}{0.5\text{ m}} = 0.2$。由 $\frac{H}{a_1} = \frac{0.2\text{ m}}{0.5\text{ m}} = 0.4$，查图 10.5 得 $(\frac{z}{a_1})_C(=0.76) > \frac{z}{a_1}(=0.2)$，为淹没出流。

按式(10.9)和式(10.8)计算 σ 及 Q

$$\sigma = 1.05(1 + 0.2\frac{h_s}{a_1})\sqrt[3]{\frac{z}{H}}$$

$$= 1.05(1 + 0.2\frac{0.6\text{ m} - 0.5\text{ m}}{0.5\text{ m}})\sqrt[3]{\frac{0.1\text{ m}}{0.2\text{ m}}} = 0.867$$

$$Q = \sigma m_0 B \sqrt{2g} H^{3/2} = 0.867 \times 0.0848 = 0.0735 \text{ m}^3/\text{s}$$

二、三角形薄壁堰

三角形薄壁堰简称三角堰，如图 10.3(c)所示。其最大优点是，小水头时水面宽度小，流量的微小变化将引起较大的水头变化，当 $Q < 0.1$ m³/s 时，可得到较高的精度，是理想的量水建筑物之一。其堰口夹角可取不同值，但常做成 90°。

不妨估计一下三角堰流量公式的形式：矩形堰公式(10.3)表明 $Q \propto BH^{3/2}$，当堰口夹角 θ 一定时，三角堰的溢流水舌宽度 B 与水头 H 成比例〔参见图 10.3(c)〕。故三角堰流量 $Q \propto H \cdot H^{3/2} \propto H^{5/2}$，引入比例系数 C，可写成

$$Q = CH^{5/2} \tag{10.10}$$

国际标准手册* 给出了 θ 在 20° ~ 120° 范围内流量系数 C 相应的图、表和经验公式。

汤普森(Thompson)试验得 $\theta = 90°$ 时，C 的近似值为 1.4，即

$$Q = 1.4H^{5/2} \tag{10.11}$$

式中单位以 m，s 计，应用条件为：0.05 m < H < 0.25 m；$a \geqslant 2H$；$B_0 \geqslant (3 \sim 4)H$。

三角堰也有淹没出流情况，但应避免之。

三、梯形薄壁堰

梯形薄壁堰的水头 H 越大，水面 B 越宽，适用量测稍大的流量，例如量测 $Q > 0.1$m³/s 时的流量 。

梯形堰口侧边与铅垂线的夹角用 θ 表示，见图 10.3(d)。当 $\text{tg}\theta = 1/4$，在自由出流情况下，西坡列梯(Cippoletti)的经验公式为

$$Q = 1.856\, bH^{3/2} \tag{10.12}$$

式中 H 为堰上水头，b 为梯形堰口的底宽，均以 m 计，上式的适用

---

* ISO 国际标准手册 16 《明渠水流测量》，中国标准出版社，1985 年。

条件为 $b \geqslant 3H$。

第五节　实用堰

实用堰是溢流坝中常见的堰型，其剖面形式较多，可大体分为曲线型和折线型两大类。无论是曲线型实用堰还是折线型实用堰，其流量公式均为堰流的普遍公式(10.2)，即

$$Q = \sigma\varepsilon m B \sqrt{2g} H_0^{3/2}$$

一、曲线型剖面实用堰

(一)剖面形状

曲线型剖面有各种定型设计，例如克里格尔(Creager)－奥菲采洛夫(Офицеров)剖面、WES* 剖面、长研Ⅰ型剖面等。其设计原则是使堰面轮廓与薄壁堰水舌下缘基本吻合，以减少水流阻力。然而水舌的形状、尺寸随水头 H 而变，设计堰面时所采用的水头称为设计水头，以 H_d 表示。在设计水头下，堰顶附近的动水压强接近于零。我国一些高坝在20世纪五六十年代常采用克－奥剖面。近几十年来多采用WES剖面。这里仅对WES剖面作简要介绍。

WES剖面堰顶由圆弧段构成，有两圆弧段和三圆弧段两大类，每一类又有几种型号。现以图10.6所示的三圆弧段WES剖面为例说明其设计思想。图10.6所示的WES剖面，其上游堰面铅直，其堰顶上游部分由三段圆弧连接，比两圆弧段可以更为平顺地与上游面连接，从而改善了堰面压力条件。堰顶下游亦用曲线方程表示，详见图10.6。

曲线型实用堰剖面的下部可与一倾斜直线相连接，再用圆弧与下游河床相连接，以便水流平顺地进入河床，参见图10.7。斜

---

* WES是Waterways Experiment Station(水道实验站)的缩写，该站属美国陆军工程兵团。

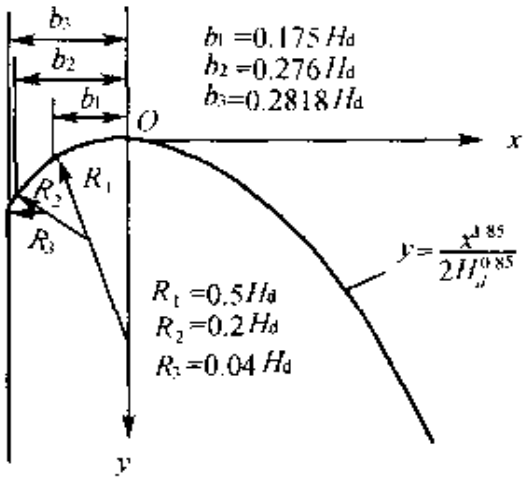


图 10.6

直线的坡度由堰的稳定性和强度要求而定。一般取 1:0.65 ~ 1:0.75。圆弧半径 R 可根据下游堰高 a_1 和设计水头 H_d 确定，可查有关规定。作为近似计算，当 $a_1 < 10$ m 时，可采用 $R = 0.5a_1$；当 $H_d > 9$ m 时，可近似用下式计算：

$$R = H_d + \frac{a_1}{4}$$

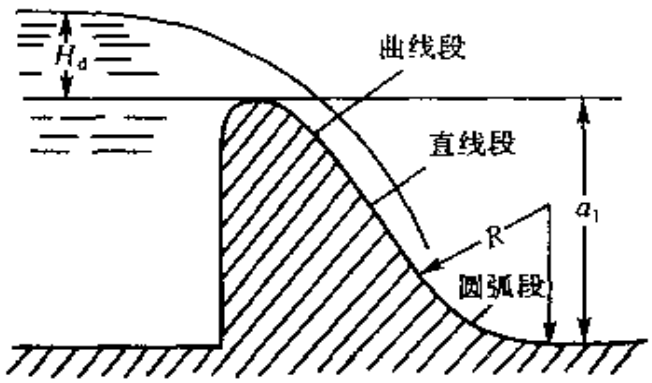


图 10.7

(二)系数的确定

曲线型实用堰的各项系数与各种堰型相匹配，具体而繁琐，在初步设计时，可参考有关文献，对于重要工程则需要做模型试验确定。这里，对式(10.2)中的流量系数 m、淹没系数 σ 和侧收缩系数

ϵ，均以分析其影响因素为主，兼举少量经验公式为例。

1. 流量系数

当水头 H 等于设计水头 H_d 时的流量系数称为设计流量系数 m_d，即 $H = H_d$ 时，$m = m_d$。各种定型的曲线型堰，其形状略有差异，因此它们的流量系数 m_d 也略有不同。例如在初步计算中，可取三圆弧段 WES 型的 $m_d = 0.502$。

实际泄流时，H 常不等于 H_d，此时堰的轮廓和薄壁堰水舌下缘形状不相吻合，堰的泄流能力和流量系数亦随之变化。当 $H > H_d$ 时，水舌抛射距离增大，水舌下缘与堰面轮廓脱离，脱离部分的空气不断被水流带走而形成真空。真空使有效水头增加，过水能力增大，因此 $m > m_d$。真空的出现虽然有增加流量的优点，但真空现象经常是不稳定的，堰面上产生正、负交替的压力有可能使堰面产生气蚀而受到损害。但出现暂时的、在允许范围内的真空还是可以的。反之，当 $H < H_d$ 时，水舌抛射距离减小，实用堰轮廓"插入"H_d 时的水舌，从而减小了堰的过水能力，因此 $m < m_d$。

流量系数 m 值与堰高 a，总水头 H_0，设计水头 H_d 等有关，或者说，与它们的比值 $\frac{H_0}{H_d}$，$\frac{a}{H}$，$\frac{a}{H_d}$ 等有关。以 $\frac{a}{H}$ 为例，它反映了堰前水流受堰壁阻挡发生垂向收缩的程度。当水头 H 一定时，上游堰高 a 不同，收缩程度不同。然而，当 a 大到一定数值时，水流的收缩已达到充分的程度，如 a 值再加大，收缩程度亦将保持不变。据研究，当 $\frac{a}{H} < 3$ 时，应考虑上游堰高 a 对流量系数 m 的影响，此时流量系数 m 的经验公式或图表常以 $\frac{a}{H}$ 为参数。而当 $\frac{a}{H} \geqslant 3$ 时，收缩程度已保持不变，$\frac{a}{H}$ 不再影响流量系数。此外，上游堰面坡度也是影响流量系数的因素。例如堰顶上游为两圆弧段的 WES 剖面，可以以上游堰面坡度为参数，以 $\frac{a}{H_d}$ 为变量，求得对于上游堰面为铅直时流量系数的修正值。

图 10.8 是上游堰面铅直、堰顶上游为三圆弧段的 WES 剖面，当$\frac{a}{H}\geqslant 3$时，流量系数 m 与$\frac{H_0}{H_d}$的关系曲线。

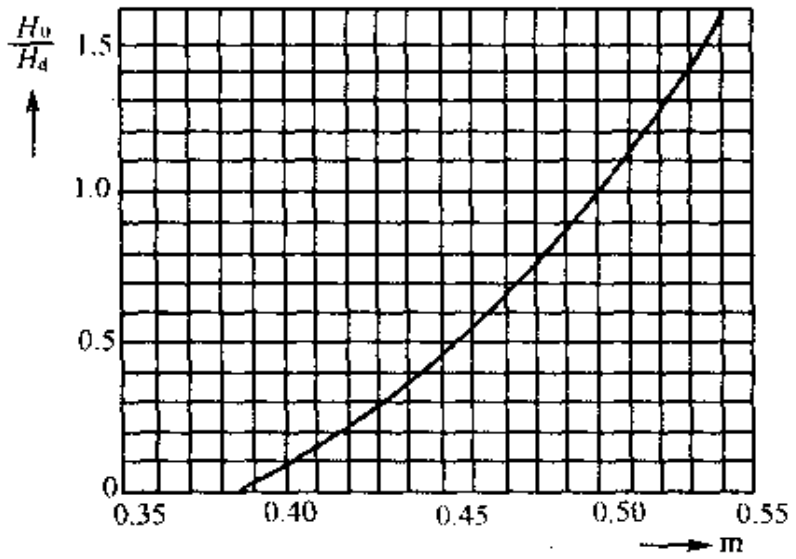


图 10.8

曲线型实用堰的流量系数随水头变化，其范围大致是 0.42 ~ 0.50。与薄壁堰相比，实用堰的堰顶厚度乃致水流阻力均较薄壁堰为大，但并不意味着实用堰的流量系数小于薄壁堰的流量系数，这是因为堰上水头 H 是从堰顶算起的缘故。如图 10.9 所示，在相同的水位以及实用堰堰面轮廓与薄壁堰水舌下缘相吻合的情况下，$H_{实} < H_{薄}$。按式(10.1)分析，虽然 $m_{实} > m_{薄}$，但与 $Q_{实} < Q_{薄}$ 并不矛盾。

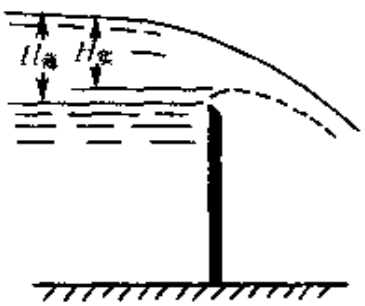


图 10.9

2. 侧收缩系数

计算侧收缩系数 ε 的经验公式很多。这些经验公式均需反映出闸墩与边墩的平面形状、溢流的孔数、堰上水头、溢流宽度等因素的影响。常用的经验公式如下：

$$\varepsilon = 1 - 0.2[(n-1)\zeta_0 + \zeta_k]\frac{H_0}{nb} \qquad (10.13)$$

式中 n 为溢流孔数，b 为每孔宽度，ζ_0 为闸墩系数，ζ_k 为边墩系数。ζ_0 和 ζ_k 值各按闸墩和边墩头部的平面形状分别由表 10.1 和表 10.2 查得。在应用式(10.13)时，如果 $\frac{H_0}{b} > 1$，按 $\frac{H_0}{b} = 1$ 代入式中计算。

表 10.1　　闸墩系数 ζ_0

闸墩头部平面形状	h_s/H_0 ≤0.75	h_s/H_0 =0.80	h_s/H_0 =0.85	h_s/H_0 =0.90	h_s/H_0 =0.95
矩形	0.80	0.86	0.92	0.98	1.00
尖角形 θ=90°					
半圆形 $r=d/2$	0.45	0.51	0.57	0.63	0.69
尖圆形 $1.21d$，$r=1.71d$	0.25	0.32	0.39	0.46	0.53

表 10.2　　边墩系数 ζ_k

边墩平面形状	ζ_k
直角形	1.00
斜角形(八字型) 45°	0.70
圆弧形	0.70

3. 淹没系数

实用堰发生淹没出流的条件与薄壁堰相同，仍然是：①下游水位高于堰顶；②堰下游发生淹没水跃。

据 WES 实用堰的试验，淹没系数 σ 与下游堰高的相对值 $\frac{a_1}{H_0}$ 和反映淹没程度的 $\frac{h_s}{H_0}$ 值有关，可直接查图 10.10。图中虚线为淹没系数 σ 的等值线，$\sigma=1$ 等值线右下方的区域为自由出流区。

二、折线型实用堰

小型溢流坝为了取材和施工方便，常采用折线型剖面，其中尤以梯形剖面（图 10.11）应用较广，其流量系数与 $\frac{a}{H}$，$\frac{\delta}{H}$ 以及上、下游堰面的倾角 θ_1，θ_2 有关，见表 10.3。流量系数的范围大致为 $m=0.33\sim0.43$，较曲线型剖面堰为小。折线型实用堰的侧收缩系数 ε 和淹没系数 σ 可近似地按曲线型实用堰计算。

表 10.3　　梯形断面堰流量系数 m 值

$\frac{a}{H}$	边坡系数		流量系数 m		
	$\cot\theta_1$	$\cot\theta_2$	$\frac{H}{\delta}=2$	$\frac{H}{\delta}=2\sim1$	$\frac{H}{\delta}=1\sim0.5$
3～5	0.5	0.5	0.43～0.42	0.40～0.38	0.36～0.35
	1.0	0	0.44	0.42	0.40
	2.0	0	0.43	0.41	0.39
2～3	0	1	0.42	0.40	0.38
	0	2	0.40	0.38	0.36
	3	0	0.42	0.40	0.38
	4	0	0.41	0.39	0.37
	5	0	0.40	0.38	0.36
1～2	10	0	0.38	0.36	0.35
	0	3	0.39	0.37	0.35
	0	5	0.37	0.35	0.34
	0	10	0.35	0.34	0.33

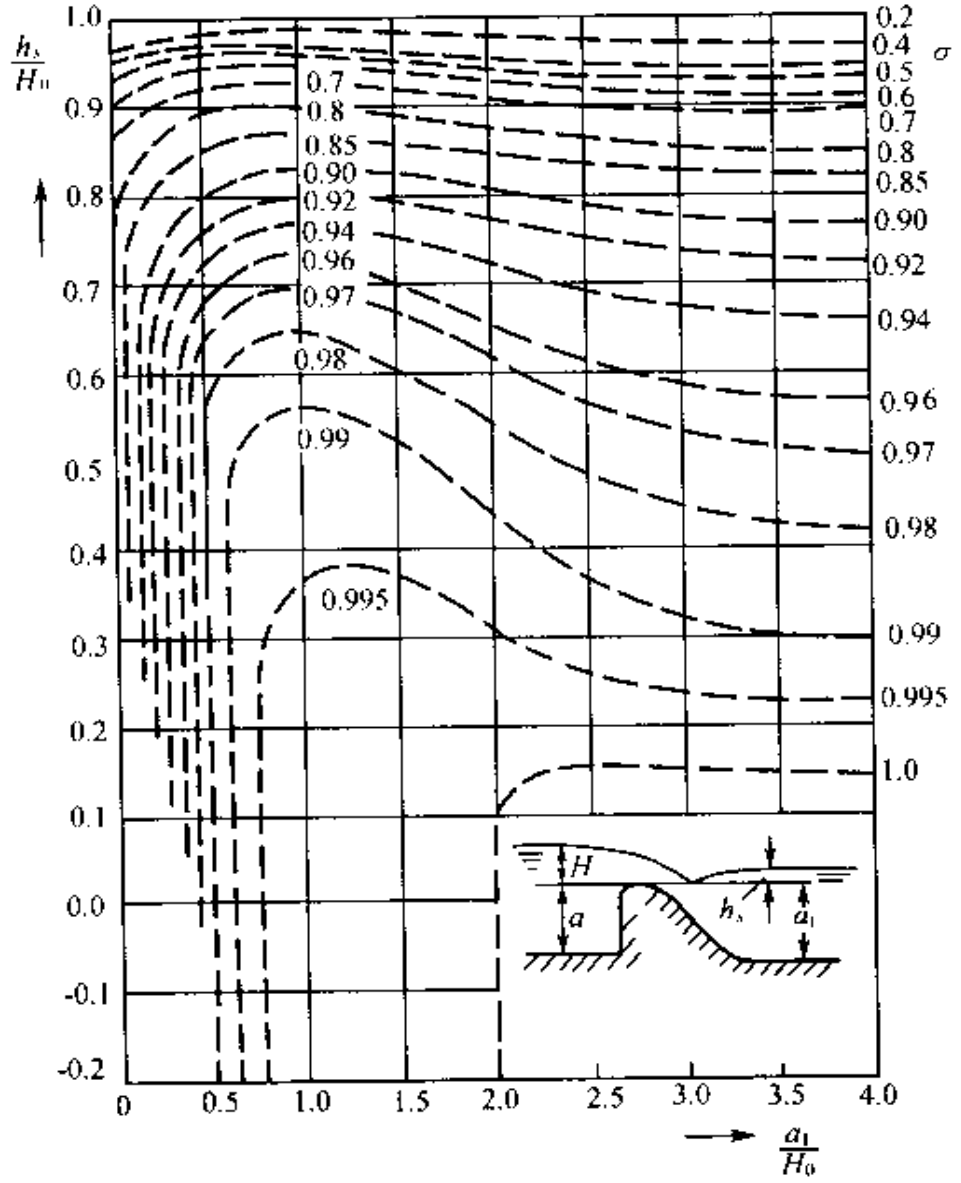


图 10.10

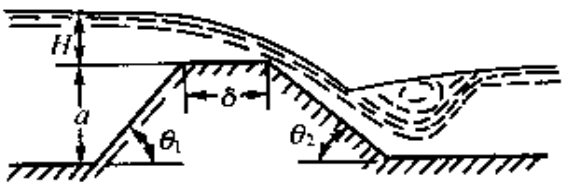


图 10.11

实用堰在按式(10.2)进行水力计算时，由于一些系数常与待

求量有关，而无法直接求解。例如，已知 H 求 Q，因 $H_0 = H + \frac{\alpha v_0^2}{2g}$，其中行近流速 v_0 与流量 Q 有关，同时系数 ε，σ 往往又与 H_0 有关，因此即使已给 H 值，也不能直接求得 Q 值。此时需要先作某些假设，再进行逐次渐近计算，直至求得正确的答案，见下例。

例 10.2 某溢流坝(图 10.12)采用三圆弧段 WES 型剖面，闸墩头部形状为半圆形，边墩为圆弧形，坝的设计流量 $Q = 5500\ m^3/s$，相应的上、下游设计水位分别为 37.0 m 及 21.2 m，坝址处河床高程为 4.0 m。上游河道宽度为 160 m。根据地质等条件选用的单宽流量 $q \leqslant 80\ m^2/s$。求：(1)坝的溢流宽度和孔数；(2)坝顶高程。

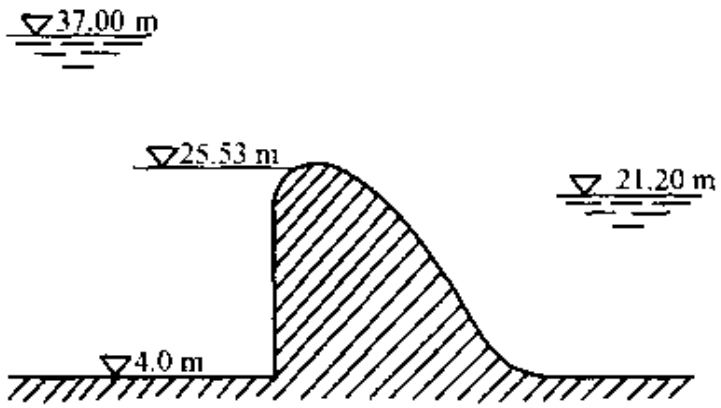


图 10.12

解： (1)坝的溢流宽度和孔数。坝的溢流宽度

$$B = \frac{Q}{q} = \frac{5500\ m^3/s}{80\ m^2/s} = 68.8\ m$$

选用每孔净宽 $b = 10$ m，则溢流孔数

$$n = \frac{B}{b} = \frac{68.8\ m}{10} = 6.88\ m$$

取溢流孔数 $n = 7$，则坝的实际溢流宽度

$$B = nb = 7 \times 10\ m = 70\ m$$

(2)计算坝顶高程。因坝顶高程取决于上游设计水位和设计水头。应先计算设计水头。

由式(10.2)，可得堰上总水头

$$H_0 = \left(\frac{Q}{\sigma\varepsilon m B \sqrt{2g}}\right)^{2/3}$$

已知 $Q = 5500\ \mathrm{m^3/s}$ 及 $B = 70\ \mathrm{m}$，当 $H = H_d$ 时，流量系数 $m = m_d = 0.502$；侧收缩系数 ε 与 H_0 有关，需先假设 ε，现设 $\varepsilon = 0.9$。又因坝顶高程和 H_0 未知，无法判别出流情况，先假设为自由出流，$\sigma = 1.0$。将以上各值代入上式得

$$H_0 = \left(\frac{5500\ \mathrm{m^3/s}}{0.9 \times 0.502 \times 70\ \mathrm{m} \times \sqrt{2 \times 9.81\ \mathrm{m/s^2}}}\right)^{2/3} = 11.60\ \mathrm{m}$$

此为 H_0 的第一次近似值。将此 H_0 值以及已知溢流孔数 $n = 7$，按半圆形墩头和自由出流（$\frac{h_s}{H_0} \leqslant 0.75$），由表 10.1 查得闸墩系数 $\zeta_0 = 0.45$；按圆弧形边墩由表 10.2 查得边墩系数 $\zeta_k = 0.70$；应用式(10.13)计算 ε，因 $\frac{H_0}{b} = \frac{11.60\ \mathrm{m}}{10\ \mathrm{m}} = 1.16 > 1$，应按 $\frac{H_0}{b} = 1$ 计算，即

$$\varepsilon = 1 - 0.2[(n-1)\zeta_0 + \zeta_k]\frac{H_0}{nb}$$

$$= 1 - 0.2[(7-1) \times 0.45 + 0.7]\frac{1}{7} = 0.903$$

此为 ε 的第二次近似值。用以重新计算 H_0，得

$$H_0 = \left(\frac{5500\ \mathrm{m^3/s}}{0.903 \times 0.502 \times 70\ \mathrm{m} \times \sqrt{2 \times 9.81\ \mathrm{m/s^2}}}\right)^{2/3} = 11.53\ \mathrm{m}$$

因 $\frac{H_0}{b} = \frac{11.53\ \mathrm{m}}{10\ \mathrm{m}} = 1.153 > 1$，仍按 $\frac{H_0}{b} = 1$ 计算 ε，则所求 ε 及 H_0 不再变化，可作为正确值。

已知上游河道宽度为 160 m，上游设计水位为 37.0 m，河底高程为 4.0 m，则上游过水断面面积（近似按矩形断面计算）为

$$A_0 = 160\ \mathrm{m} \times (37.0\ \mathrm{m} - 4.0\ \mathrm{m}) = 580\ \mathrm{m^2}$$

行近流速 $v_0 = \frac{Q}{A_0} = \frac{5500\ \mathrm{m^3/s}}{5280\ \mathrm{m^2}} = 1.04\ \mathrm{m/s}$

取 $\alpha = 1.0$，则 $\frac{\alpha v_0^2}{2g} = \frac{1.0 \times (1.04\ \mathrm{m/s})^2}{2 \times 9.81\ \mathrm{m/s^2}} = 0.06\ \mathrm{m}$

堰上设计水头 $H_d = H_0 - \frac{\alpha v_0^2}{2g} = 11.53\ \mathrm{m} - 0.06\ \mathrm{m} = 11.47\ \mathrm{m}$

坝顶高程 = 上游水位 $- H_d = 37.0\ \mathrm{m} - 11.47\ \mathrm{m} = 25.53\ \mathrm{m}$

校核出流条件：下游设计水位 21.2 m，低于堰顶高程 25.53 m，满足自由出流条件，故以上按自由出流计算的结果是正确的。

第六节　宽顶堰

一、宽顶堰的流量公式

宽顶堰在自由出流情况下，水流在进口附近有收缩现象，如图10.13中收缩断面 c－c。当堰壁厚度 $\delta > 4H$ 时，水位在收缩断面以后略有回升，并在堰顶上形成近似水平的流段，这与薄壁堰、实用堰的水舌形状很不相同。前面第三节已经以薄壁堰为例，推导出堰流公式(10.1)。该公式对宽顶堰当然也适用。但由于宽顶堰上水流有上述特点，因此，对于宽顶堰，还可以推得除式(10.1)形式以外的其他形式，现推导如下：

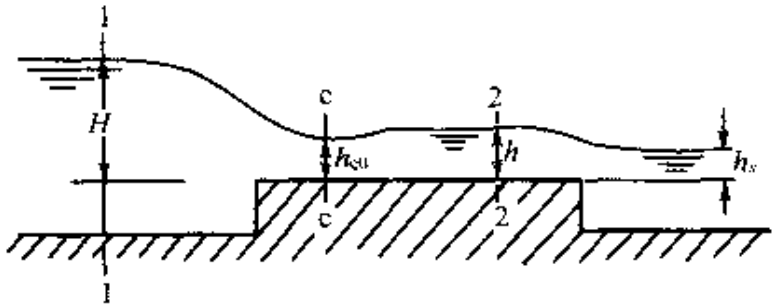


图 10.13

以堰顶为基准面，如图 10.13 所示，断面 2 取在堰顶水面近似水平的流段内，写断面 1,2 的能量方程：

$$H + \frac{\alpha_0 v_0^2}{2g} = h + \frac{\alpha v^2}{2g} + \zeta \frac{v^2}{2g}$$

化简得

$$H_0 = h + (\alpha + \zeta)\frac{v^2}{2g}$$

由此解出

$$v = \frac{1}{\sqrt{\alpha + \zeta}}\sqrt{2g(H_0 - h)} = \varphi\sqrt{2g(H_0 - h)}$$

式中 $\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{\alpha + \zeta}}$ 为流速系数。

过水面积 $A = Bh$，得宽顶堰的流量公式为

$$Q = \varphi Bh\sqrt{2g(H_0 - h)} \tag{10.14}$$

上式为宽顶堰流量公式除(10.1)以外的另一种常用形式。

在上式中,若令 $h = kH_0$,再合并有关系数,同样可得堰流的基本公式(10.1),即

$$Q = mB\sqrt{2g}H_0^{3/2}$$

此外,在式(10.14)中,当行近流速水头 $\frac{\alpha_0 v_0^2}{2g} \approx 0$,即 $H_0 \approx H$ 时,因 $H - h = z$,式(10.14)又可写为

$$Q = \varphi Bh\sqrt{2gz} \tag{10.15}$$

式中 z 为上游水位与堰顶水位之差。

式(10.14),(10.15)与式(10.1)都是宽顶堰自由出流的公式,在淹没出流情况下,同样要考虑淹没系数。

二、宽顶堰的堰顶水深

关于宽顶堰自由出流时的堰顶水深,以巴赫米切夫(Бахметев)理论为例,分析如下。

巴赫米切夫最小能量的假设认为:万物在重力场作用下,总要跌落到能量最小的地方。堰流也一样,在堰顶亦应具有最小能量。当堰顶为水平时,单位机械能就是断面单位能量 E_s,而最小单位能量时的水深就是临界水深 h_c,也就是说,堰上水深等于临界水深 h_c。

根据巴赫米切夫理论,堰上水深 $h(h_c)$ 与总水头 H_0 的关系仍可参考图 10.13 加以推导,但此时 $h = h_c$, $v = v_c$。

列断面 1,2 的能量方程

$$H + \frac{\alpha_0 v_0^2}{2g} = h_c + \frac{\alpha_c v_c^2}{2g} + \zeta\frac{v_c^2}{2g}$$

令流速系数 $\varphi = \frac{1}{\sqrt{\alpha_c + \zeta}}$,设 $\alpha_c = 1$,则上式中局部水头损失系数 ζ

$=\frac{1}{\varphi^2}-1$。又临界水深与临界流速的关系为 $h_c=2\frac{v_c^2}{2g}$。将 ζ 和 h_c 的关系代入能量方程，而 $H_0=H+\frac{\alpha_0 v_0^2}{2g}$，得

$$H_0 = h_c + \frac{1}{2}h_c + (\frac{1}{\varphi^2}-1)\frac{1}{2}h_c$$

得堰顶水深 $$h = h_c = \frac{2\varphi^2}{1+2\varphi^2}H_0 \qquad (10.16)$$

若不计阻力，$\varphi=1$，则 $h=h_c=\frac{2}{3}H_0$，若考虑了水流阻力，$\varphi<1$，堰顶水深略小于$\frac{2}{3}H_0$。

以上分析所得出的结论与试验结果基本一致。

三、流量系数及侧收缩系数

首先讨论宽顶堰流量公式 $Q=mB\sqrt{2g}H_0^{3/2}$ 中流量系数 m 的理论最大值。设式(10.16)中 $\varphi=1$，代入式(10.14)得

$$Q = \varphi B\frac{2}{3}H_0\sqrt{2g(H_0-\frac{2}{3}H_0)} = \frac{2}{3\sqrt{3}}\varphi B\sqrt{2g}H_0^{\frac{3}{2}}$$

上式与堰流公式 $Q=mB\sqrt{2g}H_0^{3/2}$ 比较，得流量系数

$$m = \frac{2}{3\sqrt{3}}\varphi = 0.385\varphi \qquad (10.17)$$

当不考虑阻力，即 $\varphi=1$ 时，$m=0.385$，这是宽顶堰流量系数的理论最大值。实际上，不可能没有阻力，即 $\varphi<1$，故 $m<0.385$。

在宽顶堰流量公式 $Q=mB\sqrt{29}H_0^{3/2}$ 中，实际的流量系数 m 值与宽顶堰的进口形式、水头 H、堰高 α 有关，可以由经验公式计算或由表查取。下面介绍的经验公式是众多经验公式中的一小部分，以供参考。

1. 别列辛斯基(A.P.Березинский)的经验公式

直角形进口〔图 10.14(a)〕

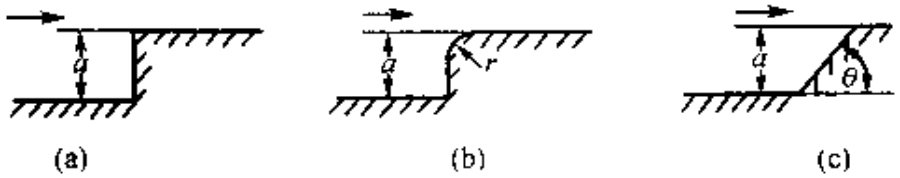
$$m = 0.32 + 0.01 \frac{3 - \frac{a}{H}}{0.46 + 0.75 \frac{a}{H}} \tag{10.18}$$

圆弧形进口〔图 10.14(b)〕

$$m = 0.36 + 0.01 \frac{3 - \frac{a}{H}}{1.2 + 1.5 \frac{a}{H}} \tag{10.19}$$

此式适用于进口圆弧半径 $r \geqslant 0.2H_0$ 的情况。

以上两式中，当 $\frac{a}{H} = 3$ 时，由堰高引起的水流垂向收缩已达到充分的程度，故当 $\frac{a}{H} \geqslant 3$ 时，仍以 $\frac{a}{H} = 3$ 代入公式中计算 m 值。



(a)　(b)　(c)

图 10.14

2. 上游堰面倾斜时，流量系数 m 的经验数据

堰上游面倾斜时〔图 10.14(c)〕，其 m 值可根据 $\frac{a}{H}$ 及上游堰面倾角 θ 由表 10.4 查得。

表 10.4　　上游面倾斜的宽顶堰的流量系数 m 值

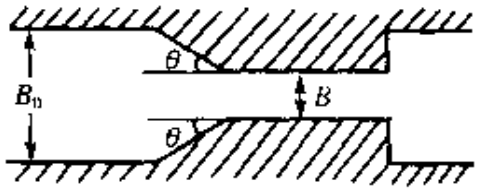
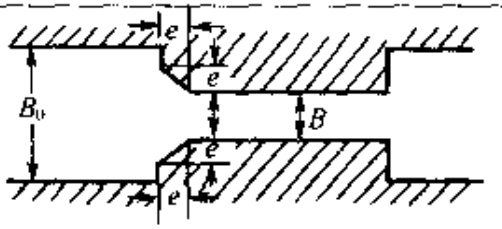
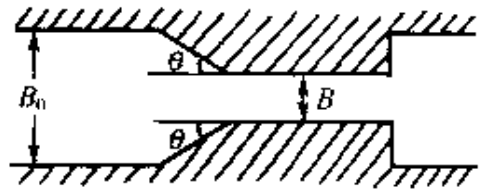
$\frac{a}{H}$ \ $\cot\theta$	0.5	1.0	1.5	2.0	≥2.5
0.0	0.385	0.385	0.385	0.385	0.385
0.2	0.372	0.377	0.380	0.382	0.382
0.4	0.365	0.373	0.377	0.380	0.381
0.6	0.361	0.370	0.376	0.379	0.380
0.8	0.357	0.368	0.375	0.378	0.379
1.0	0.355	0.367	0.374	0.377	0.378
2.0	0.349	0.363	0.371	0.375	0.377
4.0	0.345	0.361	0.370	0.374	0.376
6.0	0.344	0.360	0.369	0.374	0.376
8.0	0.343	0.360	0.369	0.374	0.376

宽顶堰 m 值的变化范围在 0.32 ~ 0.385 之间。当 $\frac{a}{H}=0$ 时，按式(10.18)、(10.19)以及表(10.4)所得的 m 值均为 0.385，即宽顶堰的最大 m 值。

宽顶堰的侧收缩系数 ε 仍可按式(10.13)计算。

此外，通过平底水闸、桥孔和无压短涵洞的水流具有和宽顶堰水流相同的特点，此类水工建筑物称为无坎宽顶堰。无坎宽顶堰的流量公式亦为式(10.2)，其流量系数 m 可按不同的进口型式由表 10.5 查得。表 10.5 中所列 m 值已包括侧收缩的影响在内，不必再乘侧收缩系数 ε。

表 10.5　　无坎宽顶堰的流量系数 m 值

进口型式			B/B_0 *					
			0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
	$\cot\theta$	0.0	0.320	0.324	0.330	0.340	0.355	0.385
		1.0	0.350	0.352	0.356	0.361	0.369	0.385
		2.0	0.353	0.355	0.358	0.363	0.370	0.385
		3.0	0.350	0.352	0.356	0.361	0.369	0.385
	$\frac{e}{B}$	0.0	0.320	0.324	0.330	0.340	0.355	0.385
		0.05	0.340	0.343	0.347	0.354	0.364	0.385
		0.1	0.345	0.348	0.351	0.357	0.366	0.385
		≥0.2	0.350	0.352	0.356	0.361	0.369	0.385
	$\frac{r}{B}$	0.0	0.320	0.324	0.330	0.340	0.355	0.385
		0.1	0.342	0.345	0.349	0.354	0.365	0.385
		0.30	0.354	0.356	0.359	0.363	0.371	0.385
		≥0.50	0.360	0.362	0.364	0.368	0.373	0.385

* 对于多孔堰，$B = nb$（n 为溢流孔数；b 为每孔净宽）。

四、淹没系数

首先说明下游水位逐渐增加情况下，宽顶堰的淹没过程。

在自由出流情况下，由于进口处的流线收缩，其收缩断面水深 h_{c0} 略小于临界水深 h_c，而成为急流，如图 10.13 所示（图中 $h_s < h_c$）。收缩断面之后，如果宽顶堰厚度足够长，堰顶水面将近似于水平，堰顶水深 $h \approx h_{c0}$。

随着下游水位的上升，当 h_s 略大于 h_c 时，如图 10.15(a) 所示，堰顶出现波状水跃，波状水跃在收缩断面之后的水深略大于 h_c，但收缩断面仍为急流，下游水位不会影响堰的泄流量，仍为自由出流。

下游水位继续升高，以致收缩断面被淹没，当堰顶水流为缓流时就成为淹没出流，如图 10.15(b)所示，此时堰顶水面与堰顶基本平行。之后，当水流进入下游明渠时，断面扩大，有一部分动能消耗于出口损失，另一部分将转化为位能，因此下游水面高出堰顶水面 Δh，称为恢复水深。Δh 的大小取决于出口水流的扩散程度。

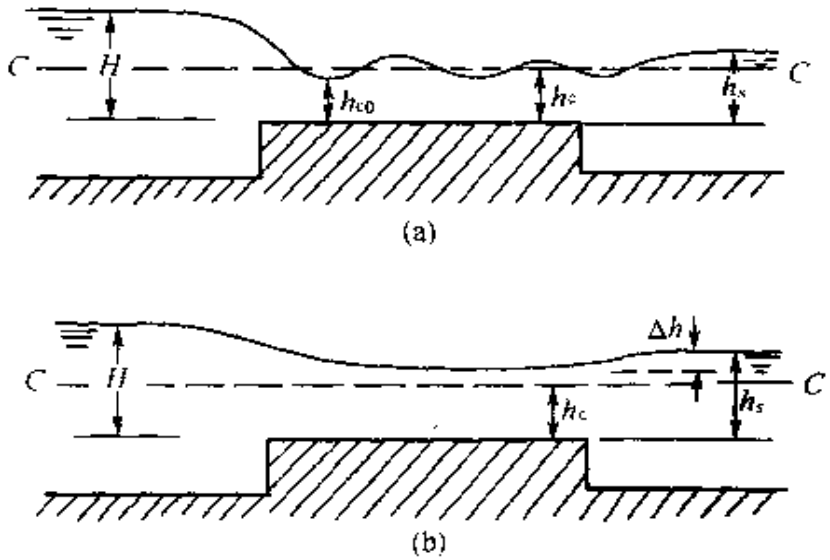


图 10.15

据上分析，淹没出流时 $h_s > h_c$，而 $h_c \approx 2/3H_0 = 0.67H_0$，因此，相对比值 $\frac{h_s}{H_0} > \frac{h_c}{H_0} \simeq 0.67$ 才有可能淹没。那么，$\frac{h_s}{H_0}$ 究竟要多大才是淹没出流呢？根据实验，宽顶堰的淹没条件为

$$\frac{h_s}{H_0} > 0.8 \tag{10.20}$$

宽顶堰的淹没系数近似地可按表 10.6 查取。

表 10.6　　宽顶堰淹没系数 σ 值

h_s/H_0	0.80	0.81	0.82	0.83	0.84	0.85	0.86	0.87	0.88	0.89
σ	1.00	0.995	0.99	0.98	0.97	0.96	0.95	0.93	0.90	0.87
h_s/H_0	0.90	0.91	0.92	0.93	0.94	0.95	0.96	0.97	0.98	
σ	0.84	0.81	0.78	0.74	0.70	0.65	0.59	0.50	0.40	

例 10.3　某干渠为宽顶堰式进水闸，上游引水渠宽为 30 m。采用尖圆形闸墩，45°斜角边墩。如图 10.16 所示，闸底高程为 100 m，闸坎高程为 101.5 m，闸坎前缘为圆弧形，圆弧半径为 1 m，设计流量为 120 m^3/s，相应的上、下游水位分别为 105.5 m 和 105.2 m。求闸的溢流宽度和溢流孔数。

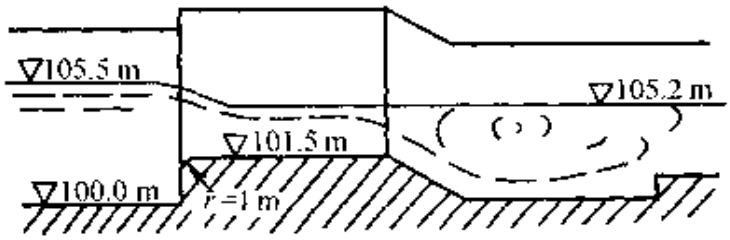


图 10.16

解：（1）先判别宽顶堰的出流情况

$$H = 105.5\ \text{m} - 101.5\ \text{m} = 4.0\ \text{m}$$

上游过水断面面积

$$A = B_0(a + H) = 30\ \text{m}(105.5\ \text{m} - 100.0\ \text{m}) = 165\ \text{m}^2$$

行近流速　　$$v_0 = \frac{Q}{A} = \frac{120\ \text{m}^3/\text{s}}{165\ \text{m}^2} = 0.727\ \text{m/s}$$

因此　　$$H_0 = H + \frac{\alpha v_0^2}{2g} = 4.0\ \text{m} + 0.027\ \text{m} = 4.03\ \text{m}$$

下游水面超过堰顶的高度 $h_s = 105.2\ \text{m} - 101.5\ \text{m} = 3.7\ \text{m}$

$\frac{h_s}{H_0} = \frac{3.7\ \text{m}}{4.03\ \text{m}} = 0.918 > 0.8$，故为淹没出流。

由表 10.6 查得 $\sigma = 0.786$。

闸坎进口为圆弧形，且 $r = 1.0\ \text{m} > 0.2H_0 = 0.2 \times 4.03\ \text{m} = 0.806\ \text{m}$，选用式(10.19)计算流量系数。式(10.19)中

$$a = 101.5\ \text{m} - 100.0\ \text{m} = 1.5\ \text{m}, \quad \frac{a}{H} = \frac{1.5\ \text{m}}{4.0\ \text{m}} = 0.375$$

代入式(10.19)得

$$m = 0.36 + 0.01\frac{3 - \frac{a}{H}}{1.2 + 1.5\frac{a}{H}} = 0.36 + 0.01\frac{3 - 0.375}{1.2 + 1.5 \times 0.375} = 0.375$$

ε 与 B 有关，现 B 未知，设 $\varepsilon = 0.90$，以此计算 B 的近似值如下：

$$B = \frac{Q}{\sigma\varepsilon m\sqrt{2g}H_0^{\frac{3}{2}}} = \frac{120\ \text{m}^3/\text{s}}{0.786 \times 0.90 \times 0.375 \times \sqrt{19.62\ \text{m/s}^2} \times (4.03\ \text{m})^{3/2}}$$

$$= 12.63\ \text{m}$$

取水闸为两孔，每孔宽度为 $b = 6.4$ m，总净宽 $B = 2b = 12.8$ m。

以上为 B 的第一次近似值，据此可计算 ε 的第二次近似值。按 $\frac{h_s}{H_0} = 0.918$ 及闸墩和边墩形状，查表 10.1 及表 10.2 得 $\zeta_0 = 0.48$，$\zeta_k = 0.70$，侧收缩系数按式(10.13)计算为

$$\varepsilon = 1 - 0.2[\zeta_k + (n-1)\zeta_0]\frac{H_0}{nb}$$

$$= 1 - 0.2[0.7 + (2-1)0.48]\frac{4.03\ \text{m}}{12.8\ \text{m}} = 0.926$$

B 的第二次近似值为

$$B = \frac{Q}{\sigma\varepsilon m\sqrt{2g}H_0^{3/2}} = \frac{120\ \text{m}^3/\text{s}}{0.786 \times 0.926 \times 0.375 \times \sqrt{19.62\ \text{m/s}^2} \times (4.03\ \text{m})^{3/2}}$$

$$= 12.26\ \text{m}$$

再将 B 的第二次近似值代入式(10.13)，可得 $\varepsilon = 0.926$，与上次相同。最后可取孔数 $n = 2$，每孔宽度 $b = 6.2$ m，总净宽 $B = 12.4$ m。

第七节　闸孔出流

闸孔出流的基本原理与第六章孔口出流的基本原理是一致的。然而，闸孔出流是指闸门建在宽顶堰或实用堰上的出流问题。由于闸底坎可以是宽顶堰也可以是实用堰，而闸门形式可以是平面闸门也可以是弧形闸门等，因此，虽然孔流(孔口出流和闸孔出流)的基本原理一致，但闸孔的流量系数除了与上、下游水位有关

外，还取决于底坎(堰顶)与闸门的形式和尺寸，因而更为复杂而多变。本节阐述的各种系数具有一定的局限性，实际应用时可参考有关资料。

一、堰流与孔流的界限

图 10.17(a)、(b)所示为宽顶堰上闸孔出流的示意图。图(a)为平面闸门，图(b)为弧形闸门。上游水位到坎顶的铅直距离称为闸孔水头，以 H 表示，闸门底缘到坎顶的铅直距离称为闸门的开启度，又称开度，以 e 表示。e 与 H 之比称为相对开度。对于宽顶堰上的水流，当为堰流时，堰上水深近似等于临界水深，即近似等于 $\frac{2}{3}H_0$，只有当 e 小于 $\frac{2}{3}H_0$ 时才有可能发生孔流。

根据实验，宽顶堰和实用堰上形成堰流或孔流的界限大致是：

宽顶堰：　$e/H \geqslant 0.65$ 为堰流；$e/H < 0.65$ 为孔流。

实用堰：　$e/H \geqslant 0.75$ 为堰流；$e/H < 0.75$ 为孔流。

如果闸孔已经建成，目测水流，当然是：闸门不触及水面时是堰流；闸门底缘触及水面时是孔流。

二、宽顶堰上的闸孔出流

在水利工程中，闸门形式一般为平面闸门或弧形闸门。图 10.17(a)，(b)所示为宽顶堰上闸孔的自由出流。取渐变流断面 1 和收缩断面 c 写能量方程：

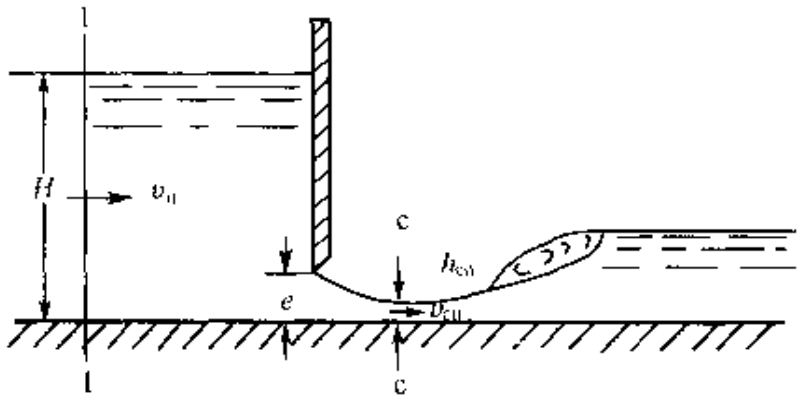
$$H + \frac{\alpha_0 v_0^2}{2g} = h_{c0} + \frac{\alpha_c v_{c0}^2}{2g} + h_w$$

令式中 $H + \frac{\alpha_0 v_0^2}{2g} = H_0$，$h_w = \zeta \frac{v_{c0}^2}{2g}$，则

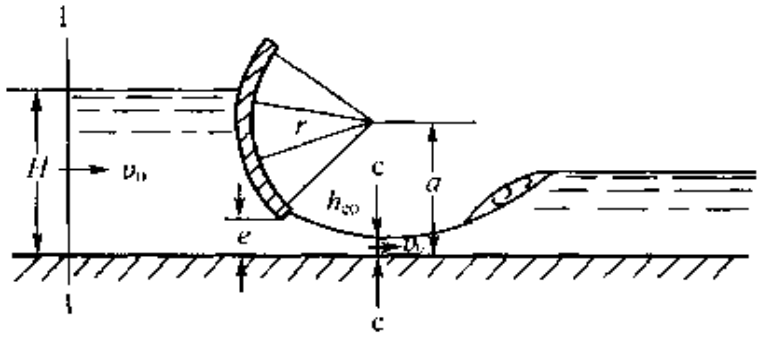
$$H_0 = h_{c0} + (\alpha_c + \zeta)\frac{v_{c0}^2}{2g}$$

即

$$v_{c0} = \frac{1}{\sqrt{\alpha_c + \zeta}}\sqrt{2g(H_0 - h_{c0})}$$



(a)



(b)

图 10.17

上式中 $\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{\alpha_c + \zeta}}$，为闸孔流速系数；

并且
$$h_{c0} = \varepsilon' e \tag{10.21}$$

ε'称为垂向收缩系数。表明收缩断面水深 h_{c0}与开度 e 成比例。

于是

$$v_{c0} = \varphi \sqrt{2g(H_0 - h_{c0})} = \varphi \sqrt{2g(H_0 - \varepsilon' e)}$$

流量 $Q = A_c v_{c0}$，当为矩形断面时，$A_c = h_{c0} B = \varepsilon' e B$，于是

$$Q = \varepsilon' \varphi e B \sqrt{2g(H_0 - h_{c0})} = \mu e B \sqrt{2g(H_0 - \varepsilon' e)} \tag{10.22}$$

式中
$$\mu = \varepsilon' \varphi \tag{10.23}$$

μ 称为闸孔流量系数。

式(10.22)亦可改写为下列形式：

$$Q = \varepsilon' \varphi e B \sqrt{2gH_0\left(1 - \varepsilon' \frac{e}{H_0}\right)} \tag{10.24}$$

令 $\mu_1 = \varepsilon' \varphi \sqrt{1 - \varepsilon' \frac{e}{H_0}}$，则上式又可写为

$$Q = \mu_1 e B \sqrt{2gH_0} \tag{10.25}$$

式中 μ_1 亦称为闸孔流量系数。

上述各式中的系数 ε'，φ，μ_1 与闸门形式等有关。均由试验确定。现以门底为锐缘的平面闸门〔图 10.17(a)〕为例说明如下。

儒可夫斯基(Жуковский)曾用理论分析的方法得到了垂向收缩系数 ε' 与相对开度 $\frac{e}{H}$ 的关系，现列于表 10.7 中。

表 10.7　　锐缘平面闸门的垂向收缩系数 ε' 值

e/H	ε'	e/H	ε'	e/H	ε'
0.00	0.611	0.30	0.625	0.60	0.661
0.05	0.613	0.35	0.628	0.65	0.673
0.10	0.615	0.40	0.633	0.70	0.687
0.15	0.617	0.45	0.639	0.75	0.703
0.20	0.619	0.50	0.645	0.80	0.720
0.25	0.622	0.55	0.652		

当闸门底部不是锐缘，而是其他形式，例如平面闸门迎水部分底部为圆弧形或圆弧闸门，其垂向收缩系数 ε' 不能套用表 10.7，而另有公式，可参考其他资料。

平面闸门的流速系数 φ 与闸坎形式、闸门底缘形状和闸门相对开度有关，目前尚无准确的计算方法，可参考表 10.8 确定。

闸孔淹没出流的流态是闸孔下游收缩断面被淹没，或者说，在闸孔下游收缩断面处发生了淹没水跃，如图 10.18 所示。在设计中，具体判别方法是：先算出收缩断面水深 h_{c0}(算法见第十一章)，

然后以 h_{c0} 为第一共轭水深，用水跃方程算出第二共轭水深 h_{c0_2}。若下游水深 $h_t > h_{c0_2}$ 则发生淹没水跃。

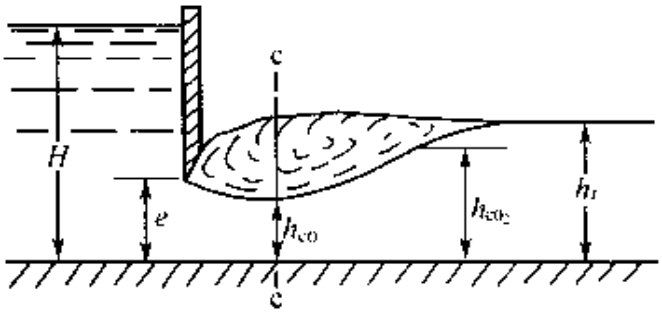
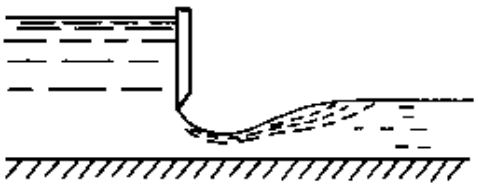
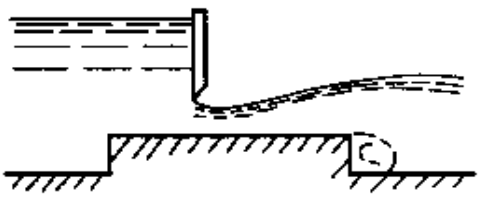
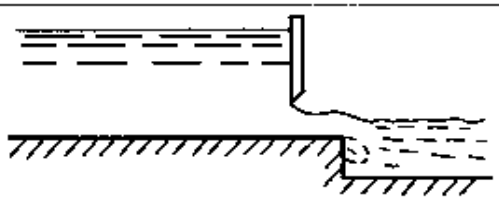


图 10.18

表 10.8　　宽顶堰式闸孔的流速系数 φ 值

	闸 坎 形 式	φ
平底闸孔		0.95 ~ 1.00
有坎闸孔		0.85 ~ 0.95
跌水前闸孔		0.97 ~ 1.00

淹没出流与自由出流相比，有效水头由 $(H_0 - h_c)$ 变为 $(H_0 -$

h_t),其流量公式为(形式之一)

$$Q = \mu eB\sqrt{2g(H_0 - h_t)} \tag{10.26}$$

式中 μ 为淹没出流的流量系数,由实验确定,其值约为 0.65 ~ 0.70。

三、实用堰上的闸孔出流

图 10.19 所示为实用堰上闸孔自由出流。流量公式可采用

$$Q = \mu_1 eB\sqrt{2gH_0}$$

式中 μ_1 为实用堰上闸孔的流量系数。

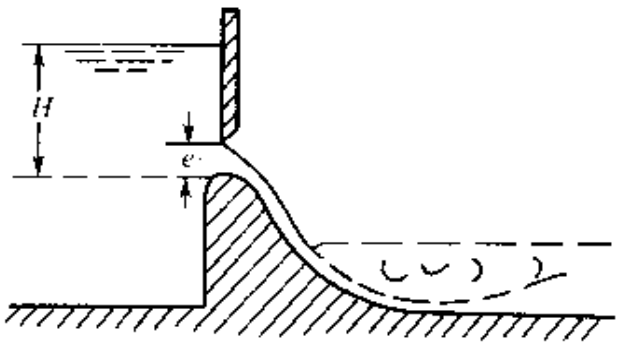


图 10.19

实用堰上的闸孔,水流在闸孔前具有上、下两个方向的垂向收缩,因此,影响流量系数的因素更为复杂。其流量系数与闸门的形式、闸门在堰顶上的位置、相对开度 $\frac{e}{H}$ 以及闸门底缘切线与水平线的夹角 θ 等因素有关,因此不可能有一个统一的公式。以下介绍的公式,作为举例,是自由出流情况下,实用堰具有不同底缘形式的平面闸门(图 10.20)的经验公式*:

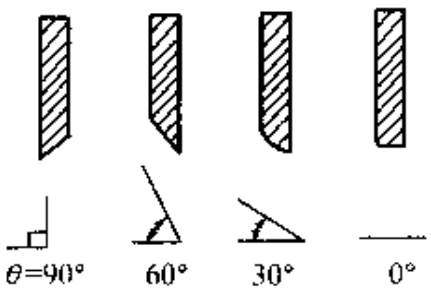


图 10.20

$$\mu_1 = 0.65 - 0.186\frac{e}{H} + (0.25 - 0.375\frac{e}{H})\cos\theta \tag{10.27}$$

上式适用于 $\frac{e}{H} = 0.05 \sim 0.75$, $\theta = 0° \sim 90°$,以及平面闸门位于堰顶最高点的情况。

---

* 王涌泉.坝上孔流系数.水利学报,1958 年第 3 期

当下游水位超过实用堰的堰顶时，下游水位便影响闸孔的泄流量。图 10.21 所示为实用堰上的淹没孔流，其流量公式可近似地用下式计算：

$$Q = \mu_1 eB\sqrt{2g(H_0 - h_s)} \tag{10.28}$$

式中 μ_1 为实用堰上闸孔自由出流的流量系数，其值由实验确定，h_s 为下游水位超过堰顶的高度。

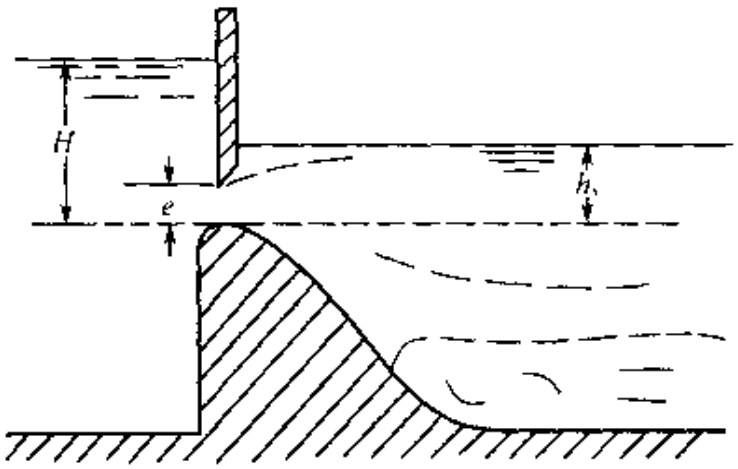


图 10.21

例 10.4 在渠道中修建一宽 $B = 3.0$ m 的宽顶堰，用门底为锐缘的平面闸门控制流量。闸底板水平。当闸门开启度 $e = 0.70$ m 时，闸前水深 $H = 2.0$ m，闸孔上游行近流速 $v_0 = 0.75$ m/s。水流为自由出流。求通过闸孔的流量 Q。

解： $\dfrac{e}{H} = \dfrac{0.7\text{ m}}{2.0\text{ m}} = 0.35 < 0.65$ 故为闸孔出流。由表(10.7)查得垂向收缩系数 $\varepsilon' = 0.628$

$$h_{c0} = \varepsilon' e = 0.628 \times 0.7\text{ m} = 0.44\text{ m}$$

由表 10.8 查得 $\varphi = 0.95$。于是

$$\mu = \varepsilon'\varphi = 0.628 \times 0.95 = 0.60$$

闸前总水头 H_0 为

$$H_0 = H + \frac{\alpha v_0^2}{2g} = 2 + \frac{1 \times (0.75\text{ m/s})^2}{2 \times 9.81\text{ m/s}^2} = 2.03\text{ m}$$

过闸流量按式(10.22)计算，得

$$Q = \mu eB\sqrt{2g(H_0 - \varepsilon' e)} =$$

$$0.60 \times 0.7\ \text{m} \times 3.0\ \text{m}\sqrt{2 \times 9.81\ \text{m/s}^2(2.03\ \text{m} - 0.44\ \text{m})} = 7.04\ \text{m}^3/\text{s}$$

例 10.5 某水库为实用堰式溢流坝，共 7 孔，每孔宽 10 m。坝顶高程为 43.36 m，坝顶设平面闸门控制流量，闸门上游面底缘切线与水平线夹角 $\theta = 0°$。水库水位为 50 m，闸门开启度 $e = 2.5$ m，下游水位低于坝顶，不计行近流速，求通过溢流坝的流量 Q。

解： 闸门开启度 $e = 2.5$ m，闸上水头 $H = 50\ \text{m} - 43.36\ \text{m} = 6.64$ m，$\frac{e}{H} = \frac{2.5\ \text{m}}{6.64\ \text{m}} = 0.377 < 0.75$，故为闸孔自由出流。

实用堰上闸孔自由出流按式(10.25)计算：

$$Q = \mu_1 eB\sqrt{2gH_0}$$

式中 $e = 2.5$ m；$B = 7 \times 10\ \text{m} = 70$ m；$H_0 \approx H$；μ_1 按式(10.27)计算：

$$\mu_1 = 0.65 - 0.186\frac{e}{H} + (0.25 - 0.375\frac{e}{H})\cos\theta$$

$$= 0.65 - 0.186 \times 0.377 + (0.25 - 0.375 \times 0.377)\cos 0° = 0.689$$

$$Q = 0.689 \times 2.5\ \text{m} \times 70\ \text{m}\sqrt{2 \times 9.81\ \text{m/s}^2 \times 6.64\ \text{m}} = 1376\ \text{m}^3/\text{s}$$

第八节 水工建筑物测流简介

对于已经建成的堰闸，往往无需再区分流量系数 m、侧收缩系数 ε 和淹没系数 σ，而只需测定一个综合系数，仍然称为流量系数。因为影响综合流量系数的因素很多，其中包括堰闸形式，甚至地形，因此该流量系数不具有普适性。如果该堰闸附近的河床是稳定的，那么根据已有闸坝测定的关系曲线也是稳定的。有了稳定的关系曲线，只要有全泄流过程的水位及开启度资料就可以推出全泄流过程的流量过程，称为推流过程。

水工建筑物测流所用的流量公式与前述堰闸基本公式在本质上是一致的，但公式形式略有不同，列举如下。

自由堰流：
$$Q = C_1 BH^{\frac{3}{2}} \tag{10.29}$$

淹没堰流：
$$\begin{cases} Q = \sigma C_1 B H^{\frac{3}{2}} & (10.30) \\ Q = C_2 B h \sqrt{z} & (10.31) \end{cases}$$

自由孔流：
$$\begin{cases} Q = MeB\sqrt{H - h_{c0}} & (10.32) \\ Q = MeB\sqrt{H} & (10.33) \end{cases}$$

淹没孔流：
$$Q = MeB\sqrt{z} \qquad (10.34)$$

以上各式中的系数 C_1、C_2、M 等实际上是包括了 $\sqrt{2g}$、侧收缩系数、淹没系数(对于淹没出流)在内的综合流量系数。式中其他符号的意义同前。

现以自由堰流和淹没孔流为例简要说明如下。

(一)自由堰流

由式(10.29)可见，流量 Q 随堰上水头 H 而变，而 H 则取决于上游水位 z_u，所以 z_u 和 Q 成单一关系数。该关系曲线的确定及用以推流的方法有两种：

1. 直接法：当实测流量次数较多且分布较均匀时，可直接根据实测上游水位与流量绘制曲线，并利用其推算任一 z_u 值时的流量 Q。

2. 间接法：当不具备上述条件时，可由实测流量 Q 及上游水位 z_u(或 H)，按式(10.29)算出 C_1 值，从而绘出 $z_u \sim C_1$ 曲线，如图 10.22(b)所示。假定一些 z_u 值，在此曲线上可查得对应的 C_1 值，再由式(10.29)算出相应的 Q。把这些 z_u 与 Q 的对应值点绘成 $z_u \sim Q$ 曲线，如图 10.22(a)所示。用此曲线即可推求任一水位 z_u 时的流量。

(二)淹没孔流

按式(10.34)可得

$$M = \frac{Q}{eB\sqrt{z}} \qquad (10.35)$$

由实测的资料可以点绘 $e/z \sim M$ 关系曲线，如图 10.23(b)所示。再以闸门开启度 e 为参数，利用 $e/z \sim M$ 关系曲线，绘制 $z \sim$

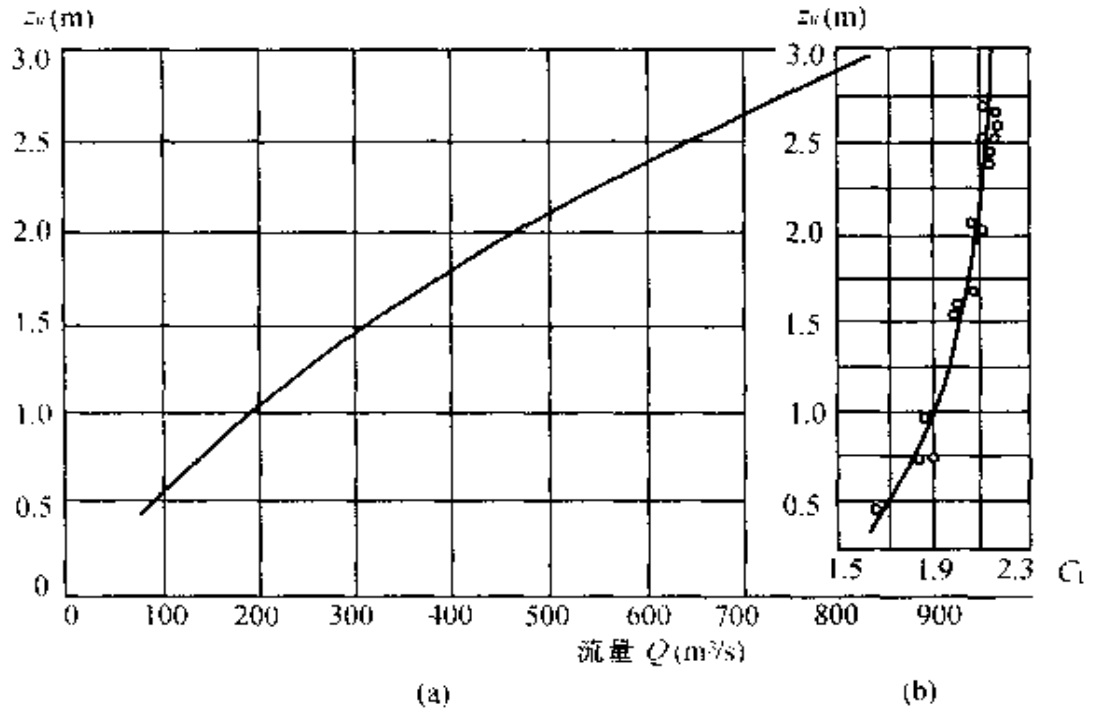


图 10.22

Q 关系曲线，如图 10.23(a)所示。

有了该关系曲线，就可以根据泄流过程中实测的水位及闸门开启度，推求在整个泄流过程中通过闸孔的流量。

第九节　测流堰槽简介

在中小河流和人工渠道上，以测流(量水)为主要目的而建造的堰或槽，统称为测流堰槽。

测流堰和测流槽的基本原理并无区别，都是通过束缩过水断面来控制水流，而测流槽往往需要有一定的“槽身”，称为“喉道”，它是过水断面最狭窄的部分，因而在自由出流的情况下可以形成缓流到急流的过渡。

随着生产发展的需要，目前测流堰槽已经规范化。国际标准化组织(ISO)下属的明渠水流测量技术委员会(代号 TC113)已制

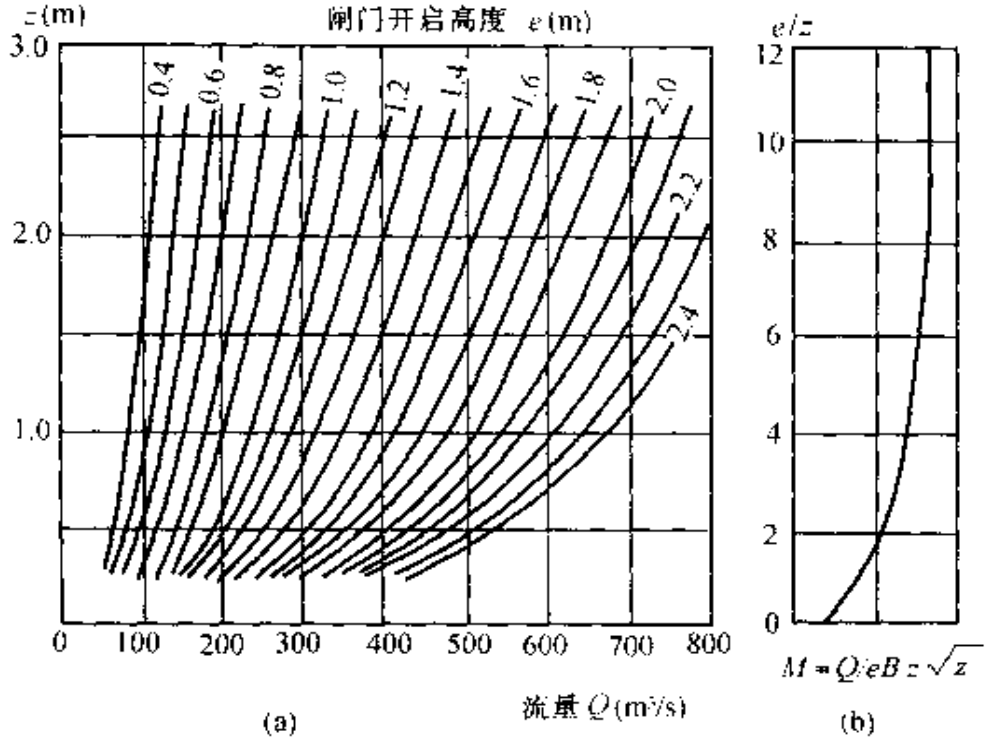


图 10.23

定了明渠水流测量的国际标准*,**;中华人民共和国水利部也颁布了堰槽测流规范***。在这些标准和规范中纳入的测流堰槽有:薄壁堰、宽顶堰、梯形剖面堰、三角剖面堰、平坦 V 形堰、长喉道槽和短喉道槽的各种型式。这些标准和规范对各类堰槽的结构和安装都做了明确的规定。严格按规定建造的堰槽,可按给定的公式(或表格、曲线)计算流量,其流量系数一般不需要再进行率定。

测流堰中的薄壁堰、宽顶堰(包括圆缘宽顶堰、锐缘宽顶堰、V 型宽顶堰等各种型式)、梯形剖面堰与前几节所阐述的薄壁堰、宽顶堰和实用堰的基本原理是一致的,只是作为测流堰,必须严格按规范建造。以下,就三角剖面堰、平坦 V 形堰、长喉道槽和巴歇尔

---

* ISO 标准手册 16 《明渠水流测量》,中国标准出版社,1985 年。

** ISO 标准手册 16(续集) 《明渠水流测量》,中国科学技术出版社,1992 年。

*** 中华人民共和国水利行业标准 《堰槽测流规范》,中华人民共和国水利部 1991 年 12 月 31 发布,水利电力出版社。

槽(属短喉道槽)作简要介绍。

一、三角剖面堰

三角剖面堰的纵剖面呈三角形,堰顶为水平直线,其上、下游坡度分别为 1:2 和 1:5。其示意图如图 10.24 所示。

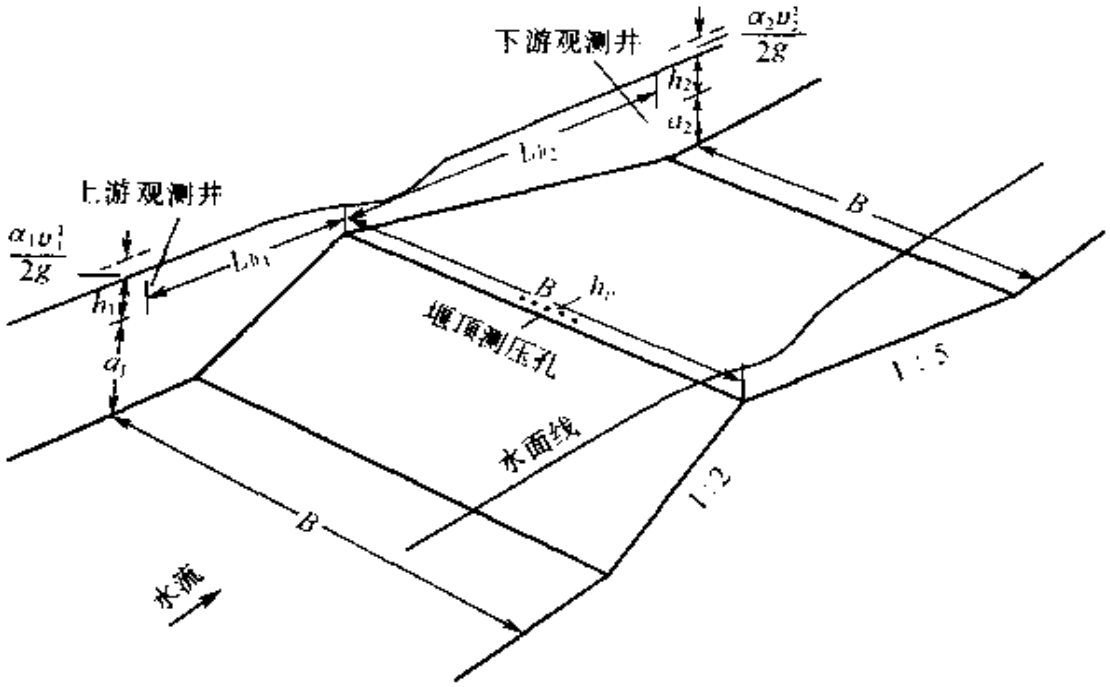


图 10.24

在三角剖面堰的上游,距离堰顶 l_{h1} 处设置测压孔量测上游水头 h_1,在堰顶附近的下游堰面上设置堰顶测压孔,以量测该处的压力水头 h_p。其原理是:三角剖面在堰顶处堰面突然转折,在堰顶下游出现分离现象,形成分离穴或称为不贴流漩涡区,如图 10.25 所示。在此处设置测压孔,在自由流情况下,h_p 的大小只与上游水头有关。当下游水位升高到淹没了分离穴并对上游水位发生顶托时,分离穴内的压力水头 h_p 就会发生相应的变化。h_p 与上游水头 h_1 的相对大小可以反映淹没程度。

三角剖面堰的优点是:

1. 流量系数比较稳定。

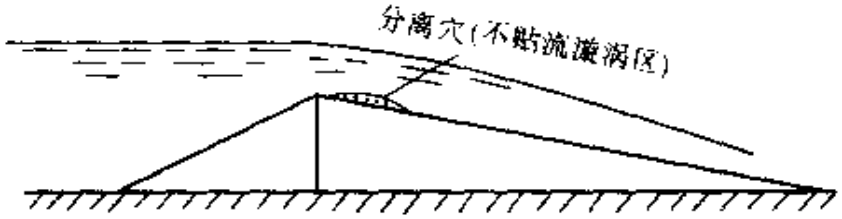


图 10.25

2. 采用 1:2 的上游坡度是避免泥沙淤积较为理想的坡度。

3. 量测分离穴水头 h_p，以 h_p 和上游水头 h_1 的相对大小来反映淹没程度，与以往用 h_2（下游水位）和 h_1 的相对大小反映淹没程度相比，可使淹没系数的量测精度提高三倍。

4. 下游坡面选用较平缓的 1:5 的优点在于：①自由出流时下游尾水位的变化可以在下游坡面上形成来回移动的水跃，有利于消能；②淹没出流时，有利于水流在坡面上逐渐扩散，使势能很好的恢复，从而保持上下游较小的水位差；③可使分离穴中的压力总是大于大气压力，因而有利于用测压孔量测压力水头 h_p。

按照堰流理论，堰流的流量与上游水头的 3/2 次方成比例。对于置於宽为 B 的矩形槽中的三角剖面堰，其自由流流量公式为

$$Q = C_{de} B \sqrt{2g} H_{1e}^{3/2} \tag{10.36}$$

式中

$$H_{1e} = h_1 + \frac{\alpha v^2}{2g} - k_h \tag{10.37}$$

k_h 为考虑粘滞性和表面张力引进的修正值；H_{1e} 为考虑修正值的总水头，称为有效总水头；C_{de} 为有效流量系数；其余符号的意义同前。

应用式(10.36)计算流量需要试算，这是因为 H_{1e} 中包括了流速水头的缘故。为了简化计算，式(10.36)改写为

$$Q = \left(\frac{2}{3}\right)^{2/3} C_d C_v \sqrt{g} B h_1^{3/2} \tag{10.38}$$

式中 h_1 为实测水头，C_d 为流量系数，C_v 为考虑了行近流速水头影响的系数，称为流速系数。

淹没出流的流量公式在式(10.38)右端乘以淹没系数 f，即

$$Q = \left(\frac{2}{3}\right)^{3/2} C_d C_v f \sqrt{g} B h_1^{3/2} \tag{10.39}$$

上式中各系数的确定方法，在前面提到的国际标准和规范中均有详细的介绍或有图表可查，在此不再详细介绍。

二、平坦 V 形堰

三角形剖面堰具有易施工、流量系数稳定等优点，但是不适用于流量变幅较大的明渠，因为，当流量变化幅度较大时，为了防止大流量时上下游水位差过大，就需要加宽堰顶，而堰顶较宽又不能保证小流量时的测流精度。为此，人们吸取了三角形剖面堰和三角形薄壁堰的优点，研制了另一种新型的测流堰，即平坦 V 形堰，其示意图如图 10.26 所示。这种堰的堰顶横断面呈坡度平缓的 V 形，其横向坡度不陡于 1:10，常采用 1:10，1:20，1:40 三种。当横向坡度为零时，就是三角形剖面堰。平坦 V 形堰的纵剖面皆为三角形，其上下游坡度与三角形剖面堰相同，常采用 1:2/1:5。

这种堰的特点是水流在 V 形缺口内时，可精确地量测小流量，而通过大流量时，水流漫过 V 形缺口，保持着三角剖面堰上游壅水较小的优点。然而，其堰体在横向和纵向都有坡度，因此其施工较为复杂。

平坦 V 形堰与三角形剖面堰一样，也是在堰顶设置测压孔，以量测分离穴的压力水头 h_p，同样可以用双水位(h_1 和 h_p)计算淹没流的流量。至于其具体的标准和计算方法，可参考有关的国际标准和规范。

三、长喉道槽

长喉道槽一般具有足够长的上游收缩段、喉道段和扩散段，以使收缩段的水面曲率较小、喉道段的水流几乎与槽底平行，水深近似为临界水深。为了保证这一点，喉道长度至少要等于测流槽上

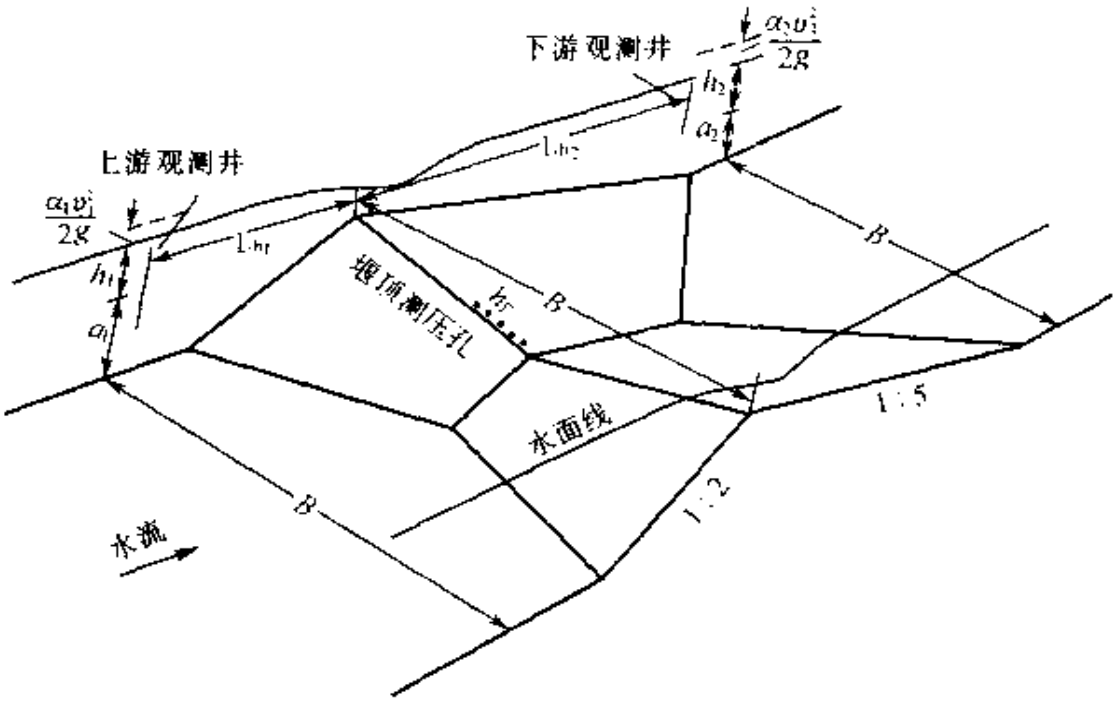


图 10.26

游最大水头的两倍。进口收缩段和出口扩散段的收缩比和扩散比不应过大,以使水流平顺。如有可能,行近槽的弗劳德数应小于0.5,否则水面波动会影响到测流精度。当弗劳德数增大到0.6时,可能会增加2%的误差。

长喉道槽的断面形状可以是矩形、梯形或U形,断面尺寸可根据需要设计,这是长喉道槽比短喉道槽灵活的地方。

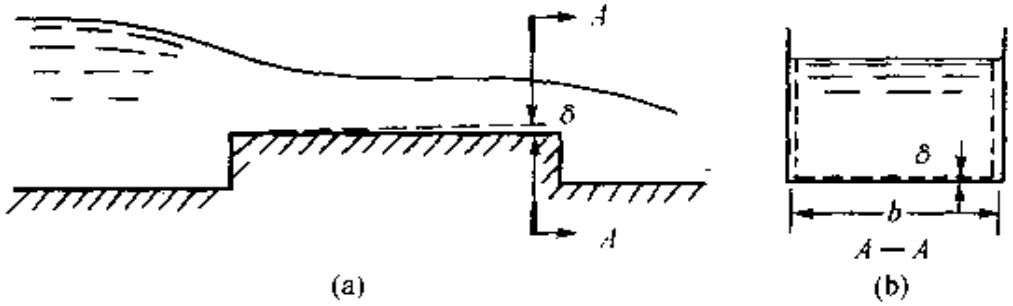


图 10.27

长喉道槽的水流特点与宽顶堰的水流特点很相象。对上游行近槽断面与喉道下端水平段的断面列能量方程,可以导出长喉道

槽的流量公式。然而，在推导长喉道的公式时，应用了边界层理论。如图 10.27(a)、(b)所示。图中 δ 为喉道下游边界层厚度。引入有效宽度 b_e 和有效水深 h_e，定义为

$$b_e = b - 2\delta; \qquad h_e = h-\delta \tag{10.40}$$

关于应用长喉道槽的各项细节，此处从略。

四、短喉道槽

长喉道槽的优点是断面尺寸可根据需要设计，但其喉道长、尺寸大，造价也高。短喉道槽的造价较低，比较适用于在流量较小的河道上测流。就测流原理而言，短喉道槽也是在喉道处形成控制断面，是缓流到急流的过渡断面。但因喉道短，而且喉道上各个断面有时又不是等截面(例如巴歇尔槽)，水面曲线明显弯曲，水压力不按静压分布，因此流量 Q 不再与 $H^{3/2}$ 成比例。它们的流量公式虽然也常采用指数形式，但其系数和指数都是个别率定的。

短喉道槽通过水流携带物体的能力比量水堰好，不仅适用于清水河渠，也可用于有漂浮物的污水河渠和多沙河渠。但其量测精度不如长喉道槽。

如使用短侯道槽，应按现场条件选用最接近要求的型号。为了保证精度，必须严格按标准尺寸修建，不能随意改变或按比例缩放标准设计中给定的各种尺寸，这既是短喉道槽的缺点(缺乏灵活性)，也是它的优点(可以定型设计)。对于一些尺寸较小的短喉道槽，甚至可以批量生产，只需运至现场按要求安装即可。

短喉道槽与长喉道槽一样，除行近河槽外，一般由上游收缩段、喉道段和下游扩散段组成。

图 10.28 为短喉道槽中常见的巴歇尔槽的示意图。其收缩段的槽底是水平的，喉道的槽底为正坡，而扩散段的槽底为负坡。其横截面均为矩形，但沿流向宽度变化。采用不同的标准尺寸，巴歇尔槽的测流范围为(0.1 ~ 9.3) m^3/s。

关于巴歇尔槽及其它短喉道槽的多项细节，此处从略。

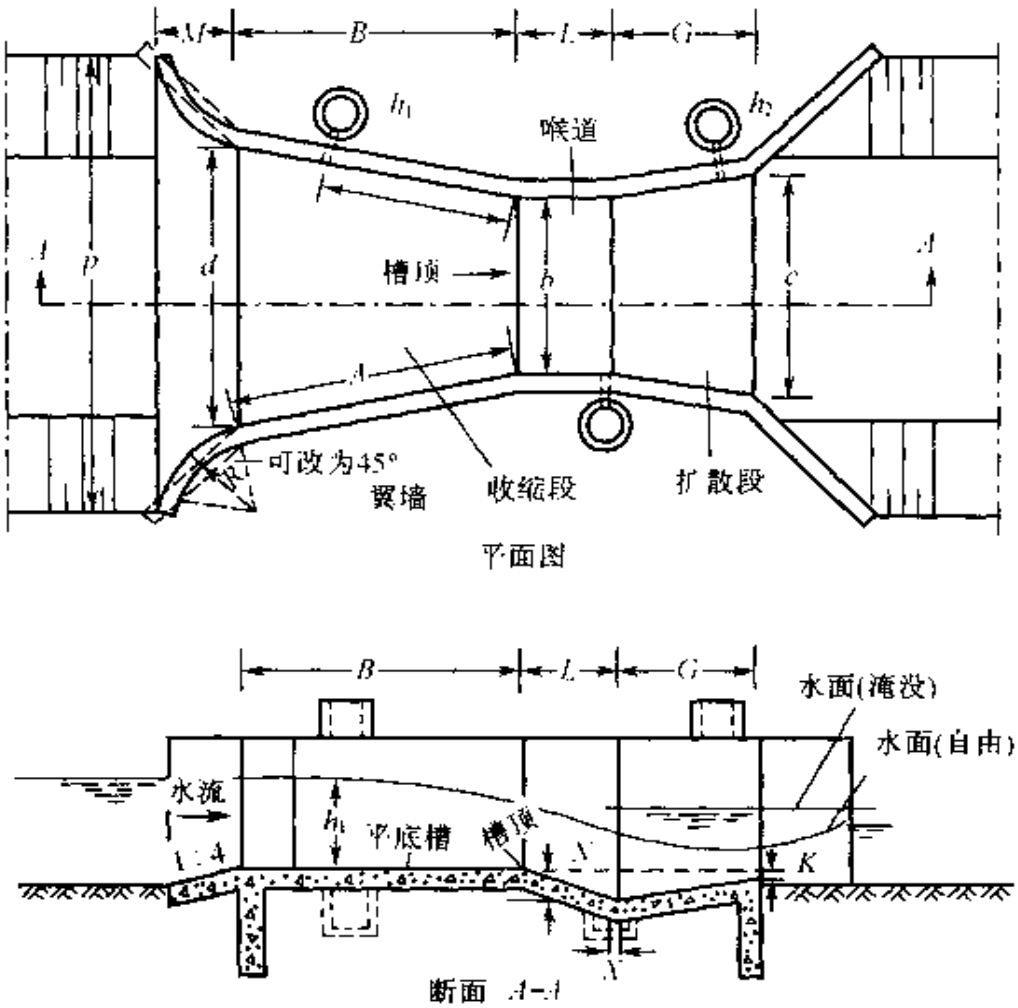


图 10.28

习　　题

10.1　有一无侧收缩矩形薄壁堰，上游堰高 $a=0.8$ m，下游堰高 $a_1=1.2$ m，堰宽 $B=1$ m，堰上水头 $H=0.4$ m，求下游水深分别为 $h_t=1$ m 和 $h_t=1.4$ m 时通过薄壁堰的流量。

10.2　有一矩形薄壁堰，上、下游堰高 $a=a_1=1$ m，堰宽 $B=0.8$ m，上游渠宽 $B_0=2$ m，堰上水头 $H=0.5$ m，下游水深 $h_t=0.8$ m，求流量。

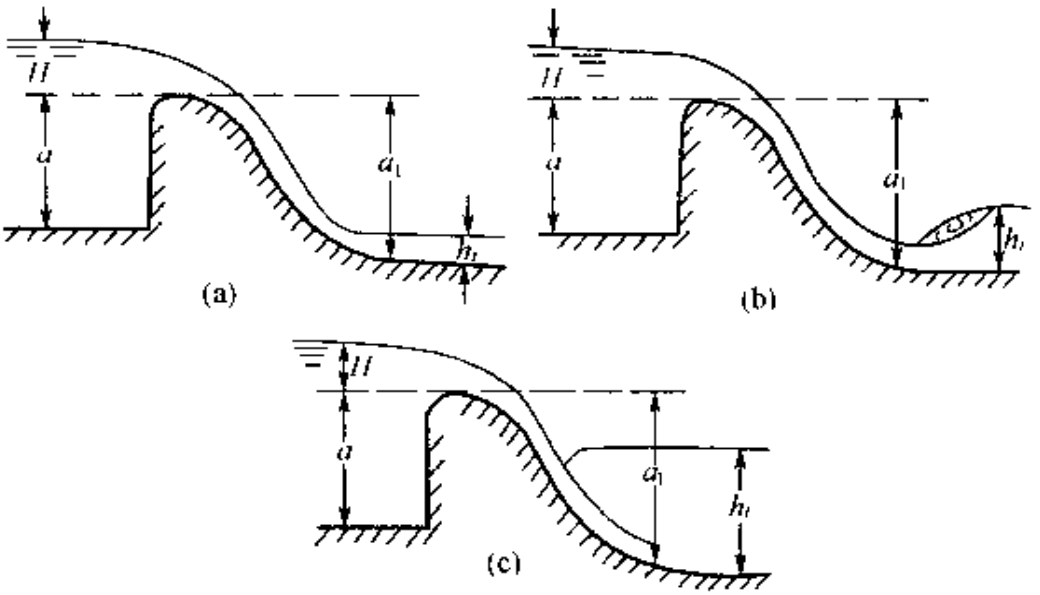
10.3　在矩形断面平底明渠中设计一无侧收缩矩形薄壁堰，已知薄壁堰最大流量 $Q=250$ l/s，相应的下游水深 $h_t=0.45$ m。为了保证堰流为自由出

流，堰顶高于下游水面不应小于 0.1 m。明渠边墙高为 1 m，边墙墙顶高于上游水面不应小于 0.1m。试设计薄壁堰的高度和宽度。

10.4　有一三角形薄壁堰，堰口夹角 $\theta = 90°$，夹角顶点高程为 0.6 m，溢流时上游水位为 0.82 m，下游水位为 0.4 m。求流量。

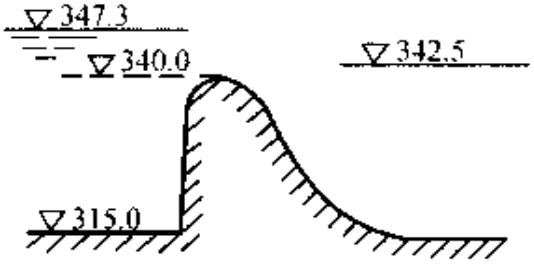
10.5　有一宽顶堰，堰顶厚度 $\delta = 16$ m，堰上水头 $H = 2$ m，如上下游水位及堰高均不变，问当 δ 分别减小至 8 m 及 4 m 时，是否还属于宽顶堰？

10.6　图示三个实用堰。它们的堰型、堰上水头 H、上游堰高 a、堰宽 B 及上游条件均相同，而下游堰高 a_1 及下游水深 h_t 不同，试判别它们的流量是否相等，并说明理由。



题 10.6 图

10.7　某水库的溢洪道采用堰顶上游为三圆弧段的 WES 型实用堰剖面，如图所示。堰顶高程为 340 m，上下游河床高程均为 315 m，设计水头 $H_d = 10$ m。溢洪道共 5 孔，每孔宽度 $b = 10$ m，闸墩墩头形状为半圆形，边墩为圆弧形。求当水库水位为 347.3 m，下游水位为 342.5 m 时，通过溢洪道的流量。设上游水库断面面积很大，行近流速 $v_0 \approx 0$。



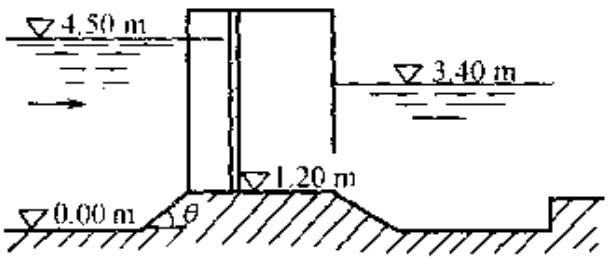
题 10.7 图

10.8　为了灌溉需要，在某河修建溢流坝一座。溢流坝采用堰顶上游为

三圆弧段的 WES 型实用堰剖面。单孔边墩为圆弧形，坝的设计洪水流量为 540m³/s。相应的上下游设计洪水位分别为 50.7 m 和 48.1 m，坝址处上下游河床高程均为 38.5 m，坝前河道过水断面面积为 524 m²。根据灌溉水位要求，已确定坝顶高程为 48.0 m，求坝的溢流宽度。

10.9 某砌石拦河溢流坝采用梯形实用堰剖面。已知堰宽与河宽均为 30m。上下游堰高均为 4 m，堰顶厚度 δ 为 2.5 m。上游堰面铅直，下游堰面坡度为 1:1。堰上水头 H 为 2 m，下游水面在堰顶以下 0.5 m。求通过溢流坝的流量。

10.10 某宽顶堰式水闸共 6 孔，每孔宽度 $b = 6$ m，具有尖圆形闸墩墩头和圆弧形边墩，其尺寸如图所示，图中 $\cot\theta = 2$。求通过水闸的流量。



题 10.10 图

10.11 从河道引水灌溉的某干渠引水闸，具有半圆形闸墩墩头和八字形翼墙。为了防止河中泥沙进入渠道，水闸进口（宽顶堰）设直角形闸坎，坎顶高程为 31 m，并高于河床 1.8 m。已知水闸设计流量 $Q = 61.8$m³/s。相应的上游河道水位和下游渠道水位分别为 34.25 m 和 33.80 m。忽略上游行近流速，并限制水闸每孔宽度不大于 4 m。求水闸宽度和闸孔数。

10.12 有一平底闸，共 5 孔，每孔宽度 $b = 3$ m。闸上设锐缘平面闸门，已知闸上水头 $H = 3.5$ m。闸门开启度 $e = 1.2$ m，自由出流，不计行近流速，求通过水闸的流量。

10.13 某实用堰共 7 孔，每孔宽度 $b = 5$ m，在实用堰堰顶最高点设平面闸门。闸门底缘与水平面之间的夹角为 30°。已知闸上水头 $H = 5.6$ m，闸孔开启度 $e = 1.5$ m，下游水位在堰顶以下，不计行近流速，求通过闸孔的流量。

第十一章　泄水建筑物下游水流的衔接和消能

第一节　概　述

在河道上兴建的水工建筑物，如节制闸、溢流坝等，抬高了上游水位，使势能增大。当建筑物泄水时，势能转换成动能，再加上为了降低工程造价或工程布置的要求，又往往要求尽可能地缩短泄流宽度，使单宽流量增加，这样就使得流经泄水建筑物下泄的水流具有很高的动能，并引起下游河床的冲刷。

冲刷是水流与河床相互作用的结果。如果不采取适当的措施，下泄水流巨大流速的冲刷作用和水流的强烈紊动，会使得河床组成物逐渐松动、瓦解、掀起和飘移，水流的能量随着冲刷深度的增加和冲刷距离的延长而不断地减少，直至与下游河道在天然状态下的水流能量接近时，冲刷才会停止。为此，必须采取工程措施，使下泄水流中残余的动能在尽可能短的距离内消耗掉，以便尽快地与天然河道中的水流衔接起来。这就是本章所要讨论的泄水建筑下游水流的衔接和消能问题。

消能问题处理不当常危及到建筑物的安全。例如奥地利的列伯丁(Lebring)坝，上下游水位差为 11.35 m，砂卵石河床，冲刷坑的深度竟达到 12 m，其冲刷的严重性可见一斑。国内外由于消能措施不当，引起的水工建筑物失事并非少见，因此，必须根据具体情况选用恰当的消能方式。

常用的消能方式有底流消能、挑流消能和面流消能三大类。其基本措施都是加剧水流内部质点之间、水质点与空气或固壁之间的摩擦和碰撞，但各种消能方式在消能措施上各有侧重。

1. 底流消能

利用水跃旋滚区中水流的激烈紊动进行消能。由于水跃区的

主流靠近底部，故称这种消能方式为底流消能。如图 11.1(a)所示。

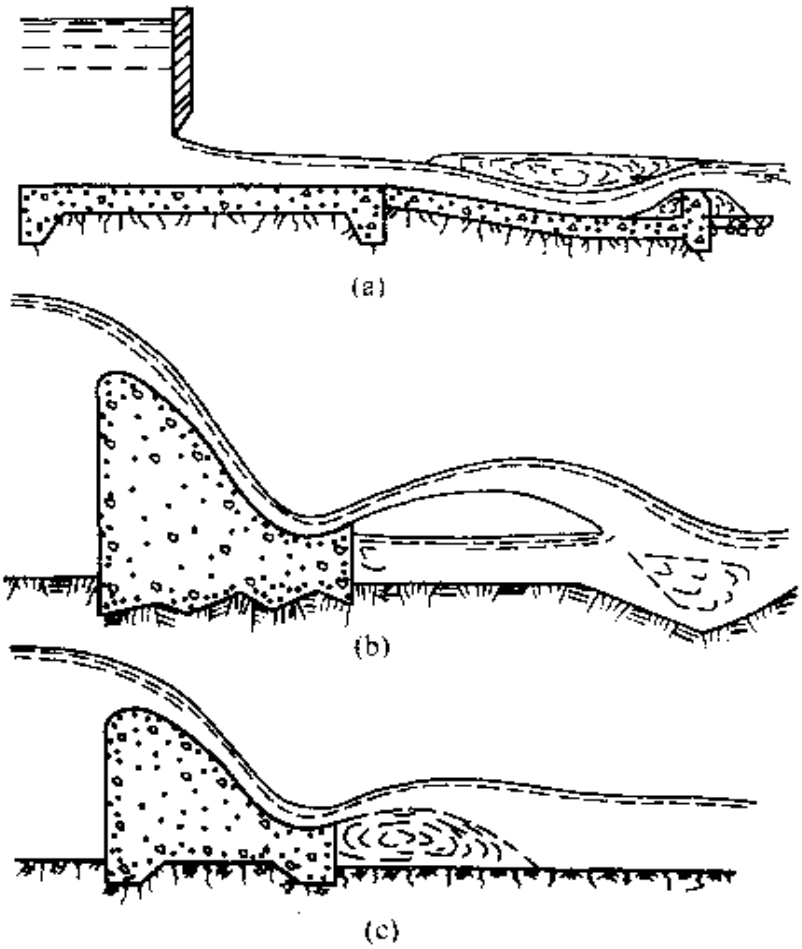


图 11.1

2. 挑流消能

在泄水建筑物的末端利用下泄水流本身的动能因势利导采用挑流坎(又称挑流鼻坎)将水股抛射入空中，使水流扩散并与空气摩擦，消耗部分动能，然后当水股落入水中时，又与下游水流和河床摩擦碰撞再进一步消耗能量。由于这种消能方式是将高速水流抛射至远离建筑物的下游，使下落水股对河床的冲刷不危及建筑物的安全，故称这种消能方式为挑流消能，如图 11.1(b)所示。

3. 面流消能

在泄水建筑物的末端设置一个比下游水位低的水平的或仰角较小的导流坎，将高速水流射入下游水域的表层，在主流与河床之间形成底部旋滚以消耗水流的能量。由于在消能段中高流速的主流位于表面部分，故称这种消能方式为面流消能，如图 11.1(c)所示。

实际工程的消能方式可能不是单一的形式，而是两种甚至三种方式的混合应用，如后面介绍的消力戽，就是面流和底流共存的混合流型。

本章将以底流消能为重点，阐述它的物理过程和水力计算方法，对其他两种消能形式仅作概略的介绍。

第二节　底流消能

从泄水建筑物下泄的水流一般均具有较大的流速，多属急流，而下游河道中的水流，流速较小，多属缓流。水流从急流过渡到缓流必然会发生水跃。

图 11.2 所示为溢流坝趾下游水跃段及跃后段(合称水跃消能段)各断面铅垂线上的流速分布图。

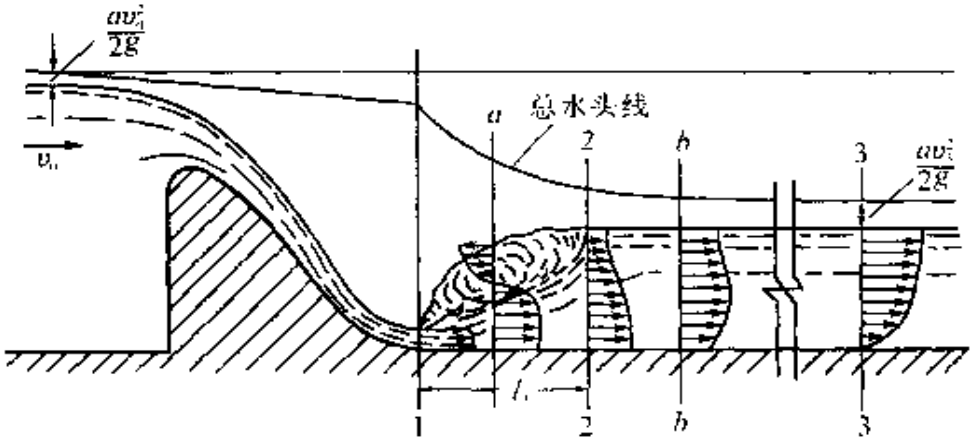


图 11.2

在跃前断面 1 上，流速最大，流速分布比较均匀，是渐变流断面。在水跃区内，如断面 a 流速分布呈 S 形，表面旋滚的上半部

流速指向上游，下半部流速指向下游，近底部流速最大，但断面的平均流速比断面 1 有所减小。跃后断面 2 的流速进一步减小，但底部流速仍比表面流速为大。断面 2 下游的流速分布情况沿流改变(如断面 b)，直到水跃下游相当距离的断面 3，流速分布才与下游原河道的水流流速分布相一致。从总水头线的变化可见，从跃前断面 1 至断面 a，总水头线急剧降落，从断面 a 至跃后断面 2，降落也很显著，说明水跃区中能量消耗较大。断面 2 至断面 3 的跃后段，总水头线缓缓降低，斜率较小，说明在此段能量消耗较小。

在讨论利用水跃消能之前，先回忆一下第八章曾经介绍过的水跃发生位置的三种形式——临界水跃、远离水跃和淹没水跃。这三种形式的水跃虽然都能起到衔接和消能的作用，但由于远离水跃的跃前断面和建筑物之间有一急流段，流速较大，对河床有冲刷作用，如果采用这种方式消能，则必须对这段河床进行加固，工程量大，很不经济，所以工程中不采用远离水跃与下游水流衔接。淹没水跃衔接，在淹没程度较大时，消能效率较低，也不经济。对于临界水跃，不论其发生位置或消能效果对工程都是有利的，但是这种水跃不稳定，如果下游水位稍有变动，即将转变为远离水跃或淹没水跃。因此，从水跃发生的位置、水跃的稳定性以及消能效果等方面综合考虑，采用淹没程度较小的淹没水跃进行衔接与消能较为适宜，因为这种水跃既能保证有一定的消能效果，又不致因下游水位的变动而转变为远离水跃。

水跃的淹没程度常用水跃淹没系数 $\sigma' = h_t / h_{c''_2}$ 来表示。显然，对于临界水跃，$\sigma' = 1$；对于远离水跃，$\sigma' < 1$；对于淹没水跃，$\sigma' > 1$。在进行泄水建筑物下游的消能设计时，一般要求

$$\sigma' = 1.05 \sim 1.1$$

从以上分析可知，要判别建筑物下游水跃发生的位置，即判别水跃的形式，必须已知收缩断面水深 h_{c0}。下面介绍收缩断面水深的计算。

一、收缩断面水深的计算

仍以溢流坝为例，如图 11.3 所示。设流量为 Q，行近流速为 v_0，坝上水头为 H，下游坝高为 a_1。以收缩断面最低点为基准面，

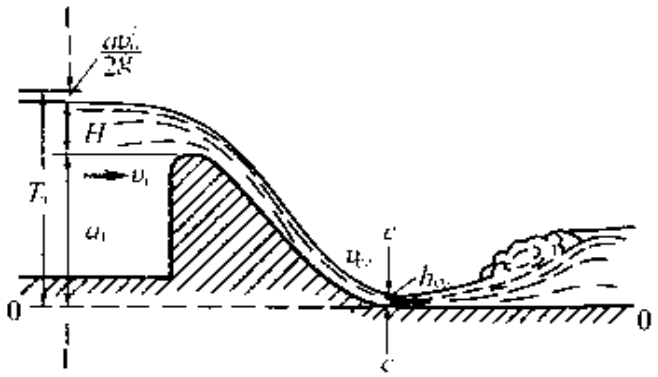


图 11.3

对坝前断面 1 和收缩断面 c 列能量方程，则有

$$H + a_1 + \frac{\alpha v_0^2}{2g} = h_{c0} + \frac{\alpha v_{c0}^2}{2g} + \zeta \frac{v_{c0}^2}{2g}$$

$$= h_{c0} + (\alpha + \zeta) \frac{v_{c0}^2}{2g}$$

令 $H + a_1 + \dfrac{\alpha v_0^2}{2g} = T + \dfrac{\alpha v_0^2}{2g} = T_0$，$T$ 为有效水头，T_0 称为有效总水头。则上式可写为

$$T_0 = h_{c0} + (\alpha + \zeta) \frac{v_{c0}^2}{2g}$$

再令 $\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{\alpha + \zeta}}$，则 $\alpha + \zeta = \dfrac{1}{\varphi^2}$，代入上式得

$$T_0 = h_{c0} + \frac{v_{c0}^2}{2g\varphi^2}$$

式中 φ 为溢流坝的流速系数。

用 $v_{c0} = \dfrac{Q}{A_{c0}}$（$A_{c0}$为收缩断面面积）代入上式，得

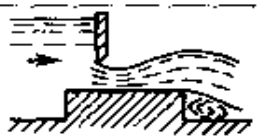
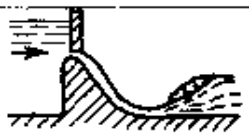
$$T_0 = h_{c0} + \frac{Q^2}{2g\varphi^2 A_{c0}^2} \tag{11.1}$$

对于矩形断面河渠，$Q = qb$，$A_{c0} = h_{c0}b$，b 为河渠底宽，则得

$$T_0 = h_{c0} + \frac{q^2}{2g\varphi^2 h_{c0}^2} \tag{11.2}$$

以上诸式中，q，a_1，v_0，T_0 是已知的。坝的流速系数 φ 的影响因素比较复杂，它与进口形式、坝面粗糙程度、坝高、坝上水头等有关，其值一般由经验确定，可参照表 11.1 选取。

表 11.1　　泄水建筑物的流速系数 φ 值

建筑物泄水方式	图　式	φ
溢流面光滑的曲线型实用堰上自由出流　1. 溢流面长度较短 2. 长度中等 3. 长度较长		1.00 0.95 0.90
折线型实用堰上自由出流		0.80～0.90
宽顶堰上自由孔流		0.85～0.95
实用堰上自由孔流		0.85～0.95
宽顶堰上自由出流		0.85～0.95
平底闸上自由孔流		0.95～1.00

式(11.1)和(11.2)为收缩断面水深 h_{c0}的三次方程，一般用试算法求解。对矩形断面河渠，h_{c0}亦可用图解法求解。

1. 试算法

已知 T_0，Q 及河渠断面形状，在选定 φ 值后，可假定一个 h_{c0} 值，求得 A_{c0}，则由式(11.1)右端可以算得某一数值，若恰好等于已知的 T_0 值，则所设的 h_{c0} 即为所求。如不等，再假定 h_{c0} 值进行试算，直至相等为止。但要注意，式(11.1)为一个三次方程，可以有三个根，而符合实际情况的是小于 h_c 的那一个 h_{c0} 值，所以试算时可只在小于 h_c 的数值中取假定值。

2. 图解法

对于矩形断面明渠的 h_{c0} 值可用附录图解 5(矩形断面明渠底流消能水力计算求解图*)求解。

如已知 φ 和 T_0/h_c，可以应用图解 5 求得 h_{c0}/h_c，则 $h_{c0}=\dfrac{h_{c0}}{h_c}h_c$。

例 11.1 某水库溢洪道进口为曲线型实用堰(图 11.4)。溢流长度中等，堰顶高程为 112.5 m，溢洪道宽度 $B=18$ m，下游渠底高程为 107.5 m。当溢洪道宣泄流量 $Q=250\text{m}^3/\text{s}$ 时，相应的上游水位为 117.72 m，下游水位为 112.2 m，行近流速 $v_0=1.36\text{m/s}$。试求收缩断面水深，并判别下游发生何种形式的水跃。

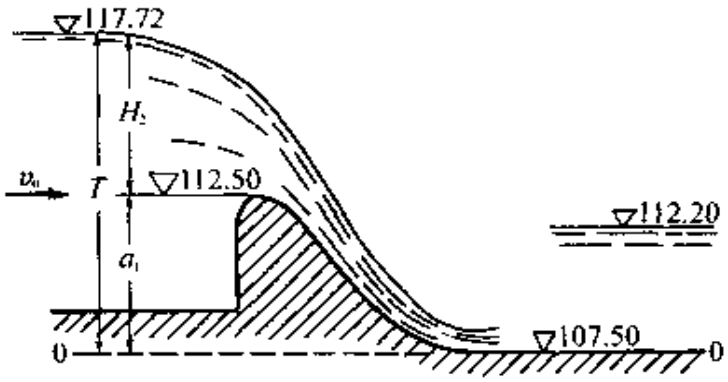


图 11.4

解： 1. 求 h_{c0}

* 本图解系由河北农业大学绘制

单宽流量　　$q = \dfrac{Q}{B} = \dfrac{250\ \mathrm{m^3/s}}{18\ \mathrm{m}} = 13.9\ \mathrm{m^2/s}$

下游堰高　　$a_1 = 112.5\ \mathrm{m} - 107.5\ \mathrm{m} = 5\ \mathrm{m}$

堰上水头　　$H = 117.72\ \mathrm{m} - 112.50\ \mathrm{m} = 5.22\ \mathrm{m}$

$$T = H + a_1 = 5.22\ \mathrm{m} + 5\ \mathrm{m} = 10.22\ \mathrm{m}$$

行近流速　　$v_0 = 1.36\ \mathrm{m/s}$

上游有效总水头

$$T_0 = T + \frac{\alpha v_0^2}{2g} = 10.22\ \mathrm{m} + \frac{1.0 \times (1.36\ \mathrm{m/s})^2}{2 \times 9.81\ \mathrm{m/s^2}} = 10.31\ \mathrm{m}$$

$$h_c = \sqrt[3]{\frac{\alpha q^2}{g}} = \sqrt[3]{\frac{1 \times (13.9\ \mathrm{m^2/s})^2}{9.81\ \mathrm{m/s^2}}} = 2.7\ \mathrm{m}$$

$$\frac{T_0}{h_c} = \frac{10.31\ \mathrm{m}}{2.70\ \mathrm{m}} = 3.81$$

由表 11.1 选取堰的流速系数 $\varphi = 0.95$。由 φ 及 T_0/h_c 查图解 5 得 $h_{c0}/h_c = 0.402$。则

$$h_{c0} = \frac{h_{c0}}{h_c} h_c = 0.402 \times 2.7\ \mathrm{m} = 1.09\ \mathrm{m}$$

2. 求 h_{c0_2}

由 $T_0/h_c = 3.81$ 及 $\varphi = 0.95$，查图解 5 可得 $h_{c0_2}/h_c = 2.04$，则

$$h_{c0_2} = \frac{h_{c0_2}}{h_c} h_c = 2.04 \times 2.70\ \mathrm{m} = 5.51\ \mathrm{m}$$

3. 判别水跃形式

下游水深　　$h_t = 112.2\ \mathrm{m} - 107.5\ \mathrm{m} = 4.7\ \mathrm{m}$

因为　$h_{c0_2} > h_t$，所以下游发生远离水跃。

二、消能工的水力计算

如果判知泄水建筑物下游发生远离水跃或临界水跃，则应采取工程措施，以保证建筑物下游能发生淹没程度较小的淹没水跃。

使远离水跃或临界水跃转变为淹没水跃的关键在于增大下游水深 h_t 值。对于一定的河床，当通过一定的流量时，下游水深也就确定了。但是，为了增大水深，并没有必要改变整个河床，而只

需在靠近建筑物下游较短的距离内使水深增大到足以发生淹没水跃即可。为此，可采取下列措施：

1. 把紧邻泄水建筑物后的一段下游护坦高程降低，形成一个水池，使池中水深相应增大，并在池中发生淹没水跃。这种降低护坦高程所形成的水池称为消力池。

2. 在泄水建筑物下游附近的河床中筑一道低堰，使低堰前水位壅高，也就是说，增大了泄水建筑物及低堰之间的水深，并在其间发生淹没水跃。这种低堰就称为消力墙。如在墙后再发生远离水跃，可考虑建第二、第三道消力墙，或采用以下第三种办法，以保证在池中发生淹没水跃。

3. 如单独采用消力池或消力墙在技术经济上均不适宜时，可两者兼用，这种消能设施称为综合式消力池。

上述各种消能设施统称为消能工。消能工水力计算的主要内容是计算消力池的深度或消力墙的高度以及消力池的长度。

(一)消力池的水力计算

1. 池深 d 的计算

消力池的水流现象如图 11.5 所示。图中 0－0 线为原河床底面线，0′－0′线为挖深 d 后的护坦底面线。当池中形成淹没水跃后，水流出池时水面跌落为 Δz，然后与下游水面相衔接，其水流现象与宽顶堰的水流现象相似。

为了使消力池中形成稍有淹没的水跃，就要求池末水深 $h_2 = \sigma' h_{c0_2}$，一般取 $\sigma' = 1.05$，h_{c0_2} 为池中发生临界水跃时的跃后水深。

由图 11.5 可知，h_2 与下游河床水深 h_t、消力池深度 d、水流出池落差 Δz 有如下的几何关系：

$$h_2 = \sigma' h_{c0_2} = h_t + d + \Delta z$$

因此

$$d = \sigma' h_{c0_2} - h_t - \Delta z \tag{11.3}$$

现分别讨论式(11.3)右端的各项如下。

(1)下游河床水深 h_t

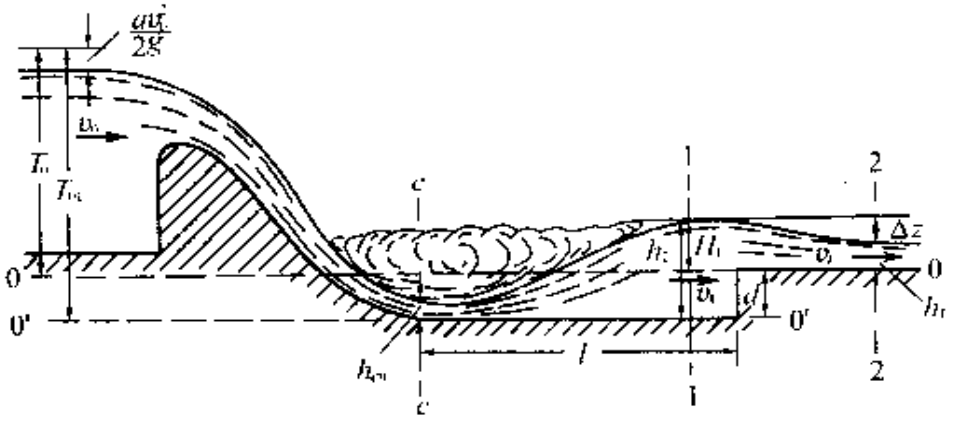


图 11.5

h_t 值取决于河床的水力特性，如有实测的水文资料（水位与流量关系曲线等），则可从给定的流量查得，否则可近似地按明渠均匀流求正常水深的方法计算（见第七章）。

（2）出池落差 Δz

以下游河底 0－0 为基准面，对消力池出口处的上游断面 1 及下游断面 2 列能量方程，其中两断面间的水头损失为 $h_j = \zeta \frac{v_t^2}{2g}$，则有

$$H_1 + \frac{\alpha v_1^2}{2g} = h_t + \frac{\alpha v_t^2}{2g} + h_j = h_t + (\alpha + \zeta)\frac{v_t^2}{2g}$$

式中 H_1 为断面 1 的水头，v_1 为断面 1 的平均流速，v_t 为断面 2 的平均流速。由上式得

$$H_1 - h_t = (\alpha + \zeta)\frac{v_t^2}{2g} - \frac{\alpha v_1^2}{2g}$$

由图 11.5 知，$H_1 - h_t = \Delta z$。令 $\frac{1}{\sqrt{\alpha + \zeta}} = \varphi_1$，为消力池出口的流速系数，则 $\alpha + \zeta = \frac{1}{\varphi_1^2}$

于是上式可改写为

$$\Delta z = \frac{v_t^2}{2g\varphi_1^2} - \frac{\alpha v_1^2}{2g}$$

以 $v_t = \frac{q}{h_t}$，$v_1 = \frac{q}{\sigma' h_{c0_2}}$，代入上式得

$$\Delta z = \frac{q^2}{2g}\left[\frac{1}{(\varphi_1 h_t)^2} - \frac{\alpha}{(\sigma' h_{c0_2})^2}\right] \tag{11.4}$$

式中 q，h_t，α（可取 $\alpha = 1.0$ 或 1.1），σ'，φ_1（一般取 $\varphi_1 = 0.95$）均为已知。关于 h_{c0_2} 见以下分析。

(3)临界水跃的跃后水深 h_{c0_2}

挖池后池中临界水跃跃后水深 h_{c0_2}，可根据挖池后的收缩断面水深 h_{c0}（$h_{c0} = h_{c0_1}$）用水跃共轭水深的公式求得。但必须注意这里的 h_{c0} 应根据挖池后的总水头 T_{01} 用式(11.1)求得。但 $T_{01} = T_0 + d$，因此 h_{c0} 和 h_{c0_2} 都与池深 d 有关，这样就无法直接由式(11.3)求得 d 值，而要用试算法求解。

为便于试算，将式(11.4)代入式(11.3)可得

$$d = \sigma' h_{c0_2} - h_t - \frac{q^2}{2g}\left[\frac{1}{(\varphi_1 h_t)^2} - \frac{1}{(\sigma' h_{c0_2})^2}\right]$$

将与 d 有关的项放在等式左边，已知项放在等式右边，可得

$$\sigma' h_{c0_2} + \frac{q^2}{2g(\sigma' h_{c0_2})^2} - d = h_t + \frac{q^2}{2g(\varphi_1 h_t)^2}$$

等式左边均与 d 有关，用 $f(d)$ 表示，右边为已知量，用 A 表示，上式可写为

$$f(d) = A \tag{11.5}$$

可用试算法或用图解 5 求解 d。具体方法见例 11.2。

2. 池长 l 的计算

池长太长了，不经济；太短了，水跃可能冲出池外，对下游河床不利。试验表明，消力池中淹没水跃的长度较平底渠道中自由水跃的长度为短，这是由于水跃受池末竖壁的约束所致，一般约减小 20% ~ 30%，因此从收缩断面起算的消力池长度为

$$l = (0.7 \sim 0.8) l_j \tag{11.6}$$

式中 l_j 为自由水跃的长度。

对于有垂直跌坎的宽顶堰，其池长还应计及跌坎壁到收缩断面的距离 l_0，如图 11.6 所示。则池长

$$l = l_0 + (0.7 \sim 0.8) l_j \tag{11.7}$$

l_0 可近似地按以下经验公式计算：

$$l_0 = 4m \sqrt{(a_1 + 0.25H_0)H_0} \tag{11.8}$$

式中 m 为宽顶堰的流量系数，a_1 为宽顶堰的下游堰高，H_0 为堰上总水头。

对于曲线型的实用堰，$l_0 = 0$。

至此，我们已能根据所给的流量计算消力池的池深和池长。但是泄水建筑物在运行时，其下泄流量是根据实际情况来控制的，有一定的变化范围。那么，应根据那一个流量来计算池深和池长，才能在全部流量变化范围内都满足消能的要求呢？显然，应当考虑最不利的情况，即以要求最大的池深和池长的流量作为消力池的设计流量。

由池深关系式(11.3)知，如果忽略落差 Δz，近似地可以看出池深 d 随($h_{c0_2} - h_t$)的增大而增大，即($h_{c0_2} - h_t$)为最大时的相应流量所要求的池深也最大。因此，可以在流量 Q 的变化范围内选取几个 Q 值，分别计算并绘制 Q 与($h_{c0_2} - h_t$)的关系曲线，如图 11.7 所示。当($h_{c0_2} - h_t$)为最大时，对应的 Q 即为消力池的设计流量 Q_d。

例 11.2 图 11.8 所示为一修筑于河道中的溢流坝，坝顶高程为 110.0 m，溢流面长度中等，河床高程为 100.00 m，上游水位为 112.96 m，下游水位为 104.00 m，通过溢流坝的单宽流量 $q = 11.3\ m^2/s$。试判别坝下游是否要做消能工。如要做消能工，则进行消力池的水力计算。

解： (1)判别下游是否要做消能工

$$T = 112.96\ m - 100.0\ m = 12.96\ m$$

$$v_0 = \frac{q}{T} = \frac{11.3\ m^2/s}{12.96\ m} = 0.87 m/s$$

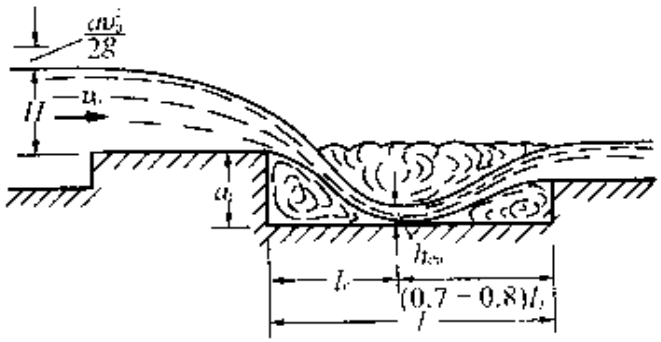


图 11.6

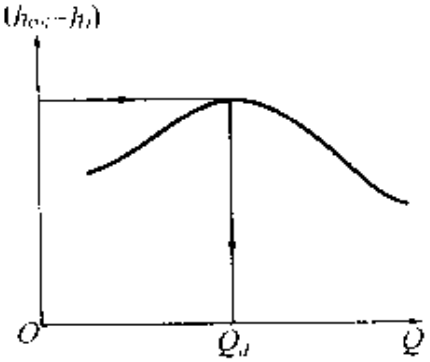


图 11.7

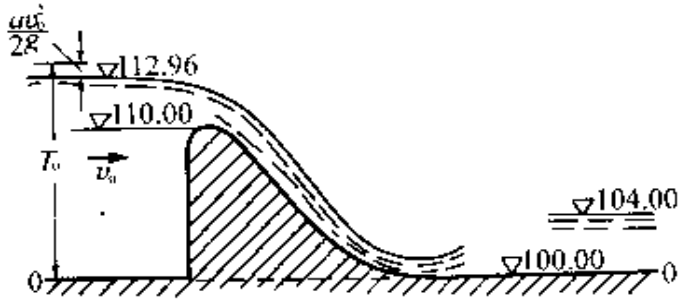


图 11.8

$$\frac{\alpha v_0^2}{2g} = \frac{1.0 \times (0.87\ \text{m/s})^2}{2 \times 9.81\ \text{m/s}} = 0.04\ \text{m}$$

上游有效总水头　$T_0 = T + \dfrac{\alpha v_0^2}{2g} = 12.96\ \text{m} + 0.04\ \text{m} = 13.0\ \text{m}$

临界水深　$h_c = \sqrt[3]{\dfrac{\alpha q^2}{g}} = \sqrt[3]{\dfrac{1.0 \times (11.3\ \text{m/s})^2}{9.81\ \text{m/s}^2}} = 2.35\ \text{m}$

$$\frac{T_0}{h_c} = \frac{13.0\ \text{m}}{2.35\ \text{m}} = 5.53$$

按坝的溢流面长度为中等，由表 11.1 查得 $\varphi = 0.95$。由 $\frac{T_0}{h_c}$ 和 φ 查图解 5 得 $h_{c0_2}/h_c = 2.32$，则

$$h_{c0_2} = \frac{h_{c0_2}}{h_c} \times h_c = 2.32 \times 2.35\ \text{m} = 5.45\ \text{m}$$

下游水深 $h_t = 104.0\ \text{m} - 100.0\ \text{m} = 4.0\ \text{m}$

因 $h_{c0_2} > h_t$，坝下游发生远离水跃，需做消能工。

(2)计算消力池池深

用式(11.5)进行试算。

$$A = h_t + \frac{q^2}{2g(\varphi_1 h_t)^2}$$

$$= 4 + \frac{(11.3\ \text{m}^2/\text{s})^2}{2 \times 9.81\ \text{m/s}^2(0.95 \times 4.0\ \text{m})^2}$$

$$= 4.45\ \text{m}$$

$$f(d) = \sigma' h_{c0_2} + \frac{q^2}{2g(\sigma' h_{c0_2})^2} - d$$

$$= 1.05 h_{c0_2} + \frac{5.91\ \text{m}^3}{h_{c0_2}^2} - d$$

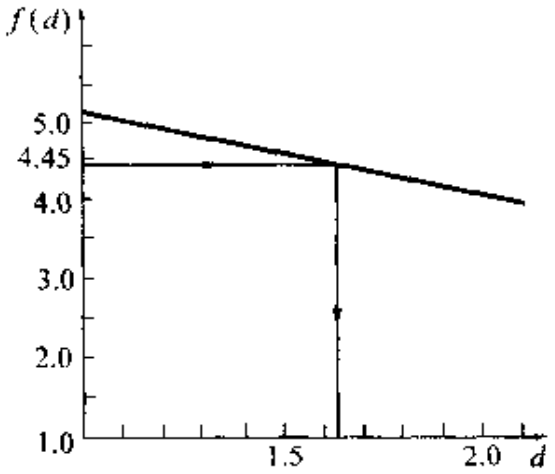


图 11.9

设几个 d 值计算相应的 $f(d)$，计算结果列于表 11.2。根据表 11.2，作出 $d - f(d)$ 曲线，如图 11.9 所示。当 $f(d) = A = 4.45$ m 时，求得 $d = 1.63$ m。

亦可用图解 5 求池深 d。由 $h_t/h_c = 4.0\ \text{m}/2.35\ \text{m} = 1.7$，$T_0/h_c = 13.0\ \text{m}/$

2.35 m = 5.53 及 $\varphi = 0.95$，查图解 5，可得 $d/h_c = 0.69$，则

$$d = 0.69 \times h_c = 0.69 \times 2.35 \text{ m} = 1.62 \text{ m}$$

表 11.2

d (m)	T_{01} (m)	$\frac{T_{01}}{h_c}$	h_{c0_2} (m)	$1.05h_{c0_2}$ (m)	$h_{c0_2}^2$ (m^2)	$5.91/h_{c0_2}^2$ (m^3)	$f(d)$ (m)
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8) = (5) + (7) − (1)
1.0	14.0	5.96	5.57	5.85	31.02	0.191	5.04
1.5	14.5	6.17	5.64	5.92	31.81	0.186	4.61
2.0	15.0	6.38	5.69	5.97	32.38	0.182	4.15

图解与试算结果很接近。工程上采用池深 $d = 1.65$ m。

(3)计算消力池池长

池长 $l = l_0 + (0.7 \sim 0.8) l_j$。对曲线型实用堰 $l_0 = 0$，$l_j = 6.9(h_2 - h_1)$，式中 h_2 与 h_1 均为挖池以后的跃后和跃前水深。

$T_{01} = T_0 + d = 13.0 \text{ m} + 1.65 \text{ m} = 14.65 \text{ m}$，

$T_{01}/h_c = 14.65 \text{ m}/2.35 \text{ m} = 6.23$。

由 $T_{01}/h_c = 6.23$ 及 $\varphi = 0.95$ 查图解 5，可得

$h_{c0_1}/h_c = 0.308$，　$h_{c0_2}/h_c = 2.4$，即

$h_{c0_1} = 0.308 \times 2.35 \text{ m} = 0.72 \text{ m}$，　$h_{c0_2} = 2.4 \times 2.35 \text{ m} = 5.64 \text{ m}$。

故　$l_j = 6.9(h_2 - h_1) = 6.9(h_{c0_2} - h_{c0_1}) = 6.9(5.64 \text{ m} - 0.72 \text{ m}) = 33.95 \text{ m}$。

因此池长　$l = 0.8 l_j = 0.8 \times 33.95 \text{ m} = 27.20 \text{ m}$。

计算结果，池深 $d = 1.65$ m，池长 27.20 m。

(二)消力墙的水力计算

消力墙的水流现象如图 11.10 所示。消力墙的断面可以是矩形或梯形。水面在消力墙前壅高而加大了墙前水深，形成淹没水跃。消力墙的水力计算在于确定墙高 s 和池长 l。

为使墙前形成稍有淹没的水跃，池中水深 h_2 应为

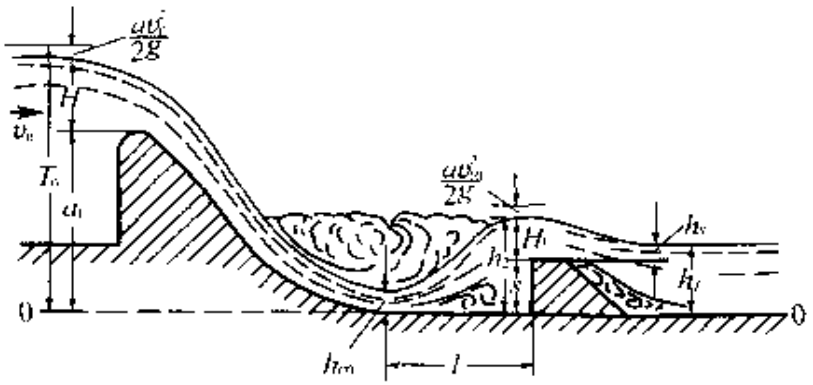


图 11.10

$$h_2 = \sigma' h_{c0_2}$$

由图 11.10 可知，$h_2 = s + H_1$（H_1 为墙顶上水头），代入上式可解得

$$s = \sigma' h_{c0_2} - H_1 \tag{11.9}$$

只要求得 h_{c0_2}和 H_1，便可求得 s。h_{c0_2}的求法同前。消力墙实际上是一种折线型的实用堰。对于矩形河渠，H_1 可由下式求得：

$$H_1 = H_{10} - \frac{\alpha v_{10}^2}{2g} = H_{10} - \frac{\alpha q^2}{2g(\sigma' h_{c0_2})^2}$$

式中 v_{10}为墙前流速；H_{10}为墙顶总水头，H_{10}可用实用堰公式求得，即

$$H_{10} = \left(\frac{q}{\sigma m' \sqrt{2g}}\right)^{2/3}$$

式中 m' 为消力墙的流量系数，在 0.40 ~ 0.44 之间，一般可取 0.42；σ 为消力墙的淹没系数，它与下游水位超过墙顶的高度 h_s 有关，即 $\sigma = f\left(\frac{h_s}{H_{10}}\right)$，其值可由第十章图 10.10 查得。但因 h_s 与墙高 s 有关，所以 σ 也与 s 有关。这样

$$H_1 = \left(\frac{q}{\sigma m' \sqrt{2g}}\right)^{2/3} - \frac{\alpha q^2}{2g(\sigma' h_{c0_2})^2} \tag{11.10}$$

从表面上来看，似乎从式(11.9)可以直接求得墙高 s，实际上

不可能，因式(11.10)表明 H_1 与 σ 有关，而 σ 又与 s 有关，所以 H_1 也与 s 有关，因此，必须用试算法求解。

为便于试算，将式(11.10)代入式(11.9)，取 $\alpha = 1.0$，得

$$s = \sigma' h_{c0_2} - H_1 = \sigma' h_{c0_2} - \left(\frac{q}{\sigma m' \sqrt{2g}}\right)^{2/3} + \frac{q^2}{2g(\sigma' h_{c0_2})^2}$$

将与墙高 s 有关的项放在等式左边，已知项放在等式右边，上式可写为

$$s + \left(\frac{q}{\sigma m' \sqrt{2g}}\right)^{2/3} = \sigma' h_{c0_2} + \frac{q^2}{2g(\sigma' h_{c0_2})^2}$$

等式左边为 s 的函数，以 $f(s)$ 表示，等式右边为已知量，以 B 表示，则上式可写为

$$f(s) = B \tag{11.11}$$

具体计算时，先算出 h_{c0_2}，求得 B。然后假设墙高 s，计算 $h_s = h_t - s$ 及 $H_1 = \sigma' h_{c0_2} - s$。由 h_s/H_1 可查得堰的淹没系数 σ，并可求得 $f(s)$。若 $f(s)$ 与 B 相等，则 s 即为所求。若不等，另设 s 再计算，直至 $f(s) = B$ 为止，亦可作出 $s \sim f(s)$ 曲线或用附录图解 5 求解 s。具体方法见例 11.3。

对于消力墙，算出墙高后，还要注意墙上溢下的水流与下游水流连接的情况。如果墙太高，以致在墙的下游又发生远离水跃，则可在下游建第二道消力墙，或改用综合式消力池。

从泄水建筑物末端至消力墙的距离亦称为消力池长度，用 l 表示。$l = l_0 + (0.7 \sim 0.8) l_j$，其计算方法同消力池。

例 11.3 按例 11.2 中所给的溢流坝，如下游采用消力墙消能，试进行消力墙的水力计算(消力墙的流量系数 $m' = 0.40$)。

解： (1)计算消力墙高度 s

用式(11.11)即 $f(s) = B$ 进行试算。例 11.2 已求得 $h_{c0_2} = 5.45$ m，则

$$B = \sigma' h_{c0_2} + \frac{q^2}{2g(\sigma' h_{c0_2})^2}$$

$$= 1.05 \times 5.45 \text{ m} + \frac{(11.3 \text{ m}^2/\text{s})^2}{2 \times 9.81 \text{ m/s}^2 (1.05 \times 5.45 \text{ m})^2}$$

$= 5.92\text{m}$

$$f(s) = s + \left(\frac{q}{\sigma m' \sqrt{2g}}\right)^{2/3} = s + \left(\frac{11.3\ \text{m}^2/\text{s}}{\sigma \times 0.40 \sqrt{2 \times 9.81\ \text{m/s}^2}}\right)^{2/3}$$

$$= s + \left(\frac{6.38\ \text{m}^{3/2}}{\sigma}\right)^{2/3}$$

设一系列 s 值，列表 11.3 进行计算。试算结果，消力墙高度 $s = 2.4$ m。

消力墙高度 s 亦可用图解 5 求得。由 $\frac{h_t}{h_c} = \frac{4.0\ \text{m}}{2.35\ \text{m}} = 1.7$，$\frac{T_0}{h_c} = \frac{13\ \text{m}}{2.35\ \text{m}} = 5.53$ 及 $\varphi = 0.95$，查图解 5 得 $\frac{s}{h_c} = 1.07$。故 $s = 1.07 h_c = 1.07 \times 2.35\ \text{m} = 2.5\ \text{m}$。采用 $s = 2.5$ m。

由于 $\frac{s}{h_c}$ 值在淹没出流区，故消力墙下游为淹没水跃，无需建第二道消力墙。

表 11.3

s	$h_s = h_t - s$ (m)	$H_1 = \sigma' h_{c_{0_2}} - s$ (m)	$\frac{h_s}{H_1}$	σ	$\frac{6.38}{\sigma}$ ($\text{m}^{3/2}$)	$(\frac{6.38}{\sigma})^{2/3}$ (m)	$f(s)$ (m)	备注
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8) = (1) + (7)	
2.0	2.0	3.72	0.54	0.926	6.83	3.60	5.60	$< B$
2.5	1.5	3.22	0.46	0.946	6.74	3.57	6.07	$> B$
2.4	1.6	3.32	0.48	0.941	6.78	3.58	5.98	$\approx B$

(2)计算消力池长度

消力池长度 $l = l_0 + 0.8 l_j$

而 $l_j = 6.9(h_2 - h_1)$。由 $T_0/h_c = 13.0\ \text{m}/2.35\ \text{m} = 5.53$ 及 $\varphi = 0.95$ 查图解 5 得 $h_{c0}/h_c = 0.326$，则

$$h_1 = h_{c0} = 0.326 \times h_c = 0.326 \times 2.35\ \text{m} = 1.06\ \text{m}$$

$$h_2 = h_{c0_2} = 5.45\ \text{m}$$

则 $l_j = 6.9(5.45\ \text{m} - 1.06\ \text{m}) = 30.29\ \text{m}$

故池长 $l = 0.8 l_j = 0.8 \times 30.29\ \text{m} = 24.23\ \text{m}$

(三)综合式消力池的水力计算

当所需消力墙过高,墙后难以保证出现淹没水跃,而单独采用消力池又可能开挖量过大时,可考虑采用综合式消力池。图11.11所示为一综合式消力池。要求墙高 s、池深 d 及池长 l。为了便于计算,先求出保证池中及墙后产生临界式水跃时的墙高 s_0 和池深 d_0。

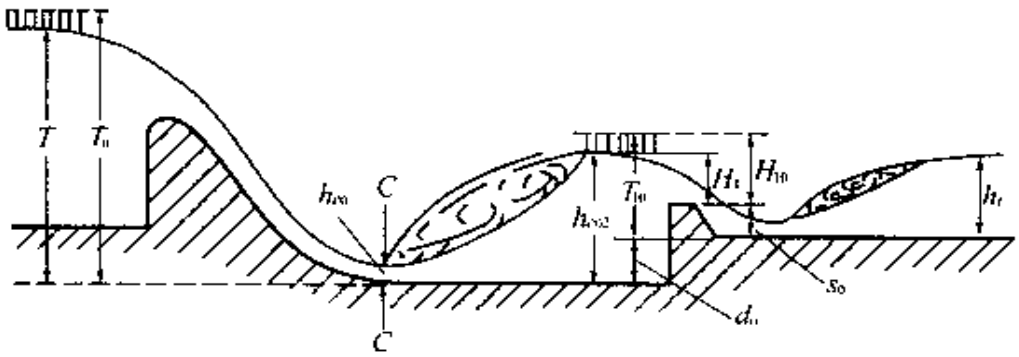


图 11.11

1. 求 s_0

令 $h_t = h_2$,用水跃方程求出 h_1,再用 $T_{10} = h_1 + \dfrac{q^2}{2g\varphi'^2 h_1^2}$ 求出 T_{10},用实用堰自由出流流量公式求出 H_{10},则 $s_0 = T_{10} - H_{10}$。

2. 求 d_0

由图 11.13 的几何关系 $h_{c0_2} = d_0 + s_0 + H_1$,可得

$$d_0 = h_{c0_2} - s_0 - \left(H_{10} - \frac{\alpha q^2}{2gh_{c0_2}^2}\right)$$

将已知量和未知量分别写在等式两边,得

$$h_{c0_2} + \frac{\alpha q^2}{2gh_{c0_2}^2} - d_0 = s_0 + H_{10}$$

等式左边为 d_0 的函数,以 $f(d_0)$ 表示,右边为已知量,以 A_0 表示,故

$$f(d_0) = A_0 \qquad (11.13)$$

由式(11.13),用试算法可求得 d_0,其方法与消力池相同。

以上计算出的 d_0 及 s_0 是池内及墙下游都发生临界水跃时的池深及墙高。实际采用的池深 d 比 d_0 略加大,而实际采用的墙高 s 比 s_0 略减小,这样在池内及墙后就能保证发生淹没水跃。综合式消力池亦可用图解 5 求解。

第三节　挑流消能

对中、高水头的泄水建筑物,由于水头和单宽流量都较大,如采用底流消能,往往需要很大的池深、池长和很强的护坦,工程费用很大;如采用面流消能,又可能因下游水深不能满足形成面流的要求;这时,如下游河床基岩有较高的抗冲能力,可考虑采用挑流消能。

挑流消能的过程主要有以下两个阶段:

1. 空中消能:水股从挑流坎射向空中,并逐渐扩散,与空气接触面积越来越大,在空气阻力作用及水股内部的摩擦、撞击以及掺气等作用下,消耗了水流的部分能量。水流扩散愈甚,消能愈多。同时在这一过程中,往往形成大片雾气,迷漫四周空间。

2. 水下消能:扩散的水股在建筑物下游远处跌入河床中,由于仍有较大的动能,故能不断冲刷河床,形成冲刷坑。坑内水深随着坑深的增加而增大,从而形成较厚的水垫,并对入流水股起着缓冲和消能的作用。水股在冲坑水垫内形成一个较大的旋滚,由于旋滚产生强烈的紊动而消耗入流水股的大部分能量。

挑流消能水力计算的主要任务有:

1. 计算下泄水流的挑射距离(简称挑距);

2. 选择挑流坎的型式和确定挑流坎的高程、反弧半径和挑射角等尺寸;

3. 估算下游冲刷坑深度的范围。

一、挑距的计算

仅讨论挑流坎为连续式(即为一简单柱面)的情况，如图11.12所示。此时，沿整个挑流坎宽度上具有同一反弧半径 R 和挑射角 α。假定忽略空气阻力和水股扩散等影响，可把挑射水流的运动看作自由抛射体的运动，则平均挑距可按自由抛射体的运动轨迹来计算。取挑流坎末端水流断面(其水深为 h，流速为 v)的中心点为坐标原点，则抛射体坐标为

$$\left.\begin{aligned} x &= v\,t\cos\alpha \\ y &= \frac{1}{2}gt^2 - v\,t\sin\alpha \end{aligned}\right\} \tag{11.14}$$

联解上式，得水平距离 x 为

$$x = \frac{v^2\cos\alpha\sin\alpha}{g}\left(1+\sqrt{1+\frac{2gy}{v^2\sin^2\alpha}}\right) \tag{11.15}$$

所求挑距有两种情况：水股落至下游水面时的水平距离 L_1；水股落至冲坑最低点时的水平距离 L_2。

(一)计算 L_1

当水股落至下游水面时，其纵坐标 y 为

$$y = z - s + \frac{h}{2}\cos\alpha$$

对于高坝，h 值相对较小，可以略去 $\frac{h}{2}\cos\alpha$。将 $y = z - s$ 值代入式(11.15)，得相应的射程为

$$L_1 = \frac{v^2\cos\alpha\sin\alpha}{g}\left[1+\sqrt{1+\frac{2g(z-s)}{v^2\sin^2\alpha}}\right] \tag{11.16}$$

式中 z 为上下游水位差；s 为上游水面至坎顶的高度。

(二)计算 L_2

冲坑最低点至坝趾的水平距离 L_2 是工程中最关心的问题。由图11.12可知，L_2 应等于水股落至下游水面时的水平距离 L_1 与水股入水点至冲坑最低点的水平距离 l 之和，即

$$L_2 = L_1 + l \tag{11.17}$$

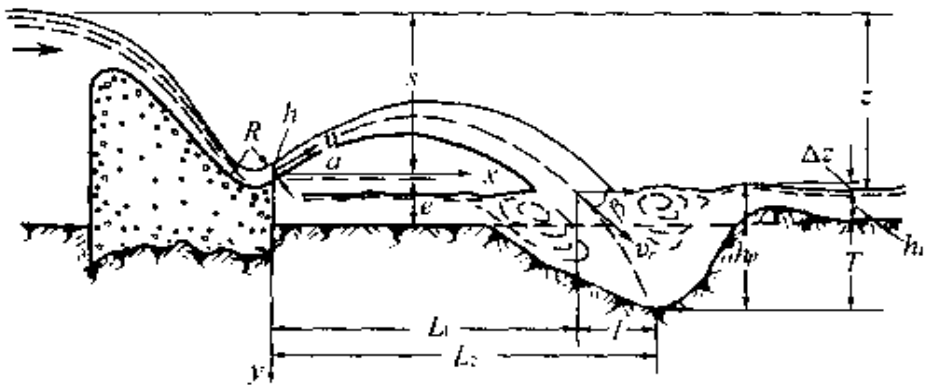


图 11.12

L_1 的求法已如上所述，下面求 l。水股落入下游水面后，已不作自由抛射运动，而属淹没射流，故不能用式(11.15)计算，但可以认为水股入水后沿入射角 β 的方向前进(见图 11.12)，并近似地取淹没射流的中心点作为冲刷坑的最低点，则有

$$l = h_p \cot \beta \tag{11.18}$$

式中 h_p 为冲坑水深，其估算式将在后面讨论。入射角 β 值可按以下近似方法确定。

对坎顶水股断面和入流水股断面近似地列能量方程，不计空中水头损失及$\frac{h}{2}\cos\alpha$，取动能校正系数 $\alpha = 1$，可得

$$\frac{v^2}{2g} = s - z + \frac{v_r^2}{2g}$$

因 $v = \varphi\sqrt{2gs}$，代入上式，解得水股入流流速 v_r 为

$$v_r = \sqrt{2g(\varphi^2 s - s + z)}$$

设水股射出后，其水平分速在整个射程中保持不变，即

$$v_{rx} = v_x = v\cos\alpha = \varphi\sqrt{2gs}\cos\alpha$$

于是有

$$\cos\beta = \frac{v_{rx}}{v_r} = \frac{\varphi\sqrt{2gs}\cos\alpha}{\sqrt{2g(\varphi^2 s + z - s)}} = \sqrt{\frac{\varphi^2 s}{\varphi^2 s + z - s}}\cos\alpha \tag{11.19}$$

由上式可求出 β 值。

二、挑射角 α 的选择

根据抛射运动原理，当挑流坎高程与下游水面齐平时，挑射角 $\alpha = 45°$ 的挑射距离最远，即挑距最大。但根据工程实践，挑射角不能太大，因挑流坎的反弧半径是根据最大设计流量确定的，当泄流量较小时，如挑射角太大，可能在反弧面内形成水跃状水滚，水流不能顺利射出坎顶，而从坎顶漫溢，落至坎脚，以致冲刷坎脚附近的河床，所以一般挑流坎的挑射角为 15° ~ 30°。

三、坎顶高程的确定

从安全角度考虑，如下游水位淹没坎顶，水流的挑射将受到影响，故坎顶应高于下游水位 1 ~ 2 m。

四、反弧半径 R 的确定

挑流坎反弧半径 R 与挑流坎上的流速大小有关。根据实验和工程实践，R 应大于最大设计流量时的坎顶水深 h 的六倍，即 $R > 6h$。通常取 $R = (8 \sim 10)h$。

五、冲刷坑深度 T 的估算

概括说来，冲刷坑的深度决定于水流的冲刷能力与河床的抗冲能力两个方面。当入水水股的冲刷能力大于河床抗冲能力时，河床即被破坏而形成冲刷坑。随着冲刷坑的加深，水股入水后的扩散范围增大，水流动能逐渐减小，冲刷能力也逐渐减弱，直至水股的冲刷能力与河床的抗冲能力平衡时，冲刷坑就不再加深而基本上达到稳定。

冲刷坑的水深 h_p（见图 11.12）与挑流坎单宽流量、水股厚度、水股扩散程度、水股入水倾角和入水流速以及下游水深等有关，更复杂的是它还随下游河床地质情况的不同而异。由于自然界中各

种河床的地质情况千差万别，通过理论推导出冲刷坑水深计算公式目前尚不可能，只能用经验公式来估算。又因试验的条件不同，各经验公式计算的结果差别也很大。目前多采用以单宽流量 q 和上下游水位差 z 为主要参数的冲刷坑水深的经验公式，即

$$h_p = Kq^m z^n \tag{11.20}$$

式中 K 为系数，m，n 均为指数。由于上式比较简单，并且如 K 值选择适当，较能符合实际情况，故得到广泛应用。我国陈椿庭建议*，对于溢流高坝，式(11.20)中采用 $K = 1.25$，$m = 0.5$，$n = 0.25$，其冲刷坑水深的公式为

$$h_p = 1.25q^{0.5}z^{0.25} \tag{11.21}$$

根据实际工程的原型观测资料，系数 K 不应为一常数，而与河床地质条件有关，有些工程部门建议将式(11.20)改为

$$h_p = Kq^{0.5}z^{0.25} \tag{11.22}$$

如我国水电部第三工程局提出 K 值大致可分三种情况**：对于坚硬、较完整、抗冲能力强的岩石，$K = 0.9 \sim 1.2$；对于半坚硬、完整性较差的岩石，K 值在 1.2～1.5 左右；对于岩石破碎、裂缝发达、完整性很差的松软岩石，$K = 1.5 \sim 2.0$；软基 $K = 2.2 \sim 2.5$。

知道冲刷坑水深 h_p 后，河床冲刷坑深度 T 可由下式求得

$$T = h_p - \Delta z - h_t$$

式中 h_t 为下游水深，Δz 为冲坑水面与下游水面之间的落差。初步估算时，Δz 多忽略不计，所得 T 值稍偏大，设计偏于安全，即

$$T = h_p - h_t \tag{11.23}$$

有了冲刷坑深度 T，则冲坑范围可以根据冲坑边坡进行估算。冲坑上游边坡：坚硬完整或较完整的基岩为 1∶2.5～1∶4；软弱破碎、裂隙发育基岩为 1∶3～1∶5；软基为 1∶5～1∶6。下游边坡及两

---

* 陈椿庭．关于高坝挑流消能和局部冲刷的一个估算方法，水利学报，1963 年第 2 期。

** 水电部第三工程局．关于水工建筑物挑流消能造成下游冲刷调查资料综述，水电技术，1974 年第 3 期。

侧边坡约为 1:1 ~ 1:3。

第四节　面流消能

在泄水建筑物的末端设一鼻坎，将下泄的高速水股引向水流表面，并逐渐向下游扩散，而靠近河底的流速则较小，同时在坎后的主流区下部形成激烈的旋滚，以消耗下泄水流的能量，这种消能方式称为面流消能，如图 11.13 所示。

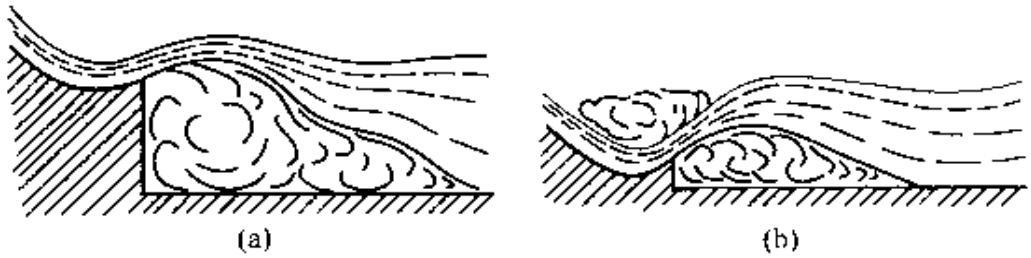


图 11.13

鼻坎的型式有高坎〔图 11.13(a)〕和低坎〔图 11.13(b)〕两种。高坎就是面流坎，低坎又称消力戽。两种鼻坎的主要区别是高坎的坎角（鼻坎坎面末端的切线与水平线之间的夹角）较小，坎高较大；消力戽的坎角较大，坎高较小。典型的高坎是坎角 $\theta = 0°$ 的水平连续坎，坎面最低点恒高出下游河床。典型的消力戽的坎角 $\theta = 45°$，戽底基本与下游河床同高。

面流消能虽有五六十年的发展历史，但高坎面流消能用于我国工程实际还是从 50 年代末才开始，而消力戽面流消能的应用更迟至 70 年代初。通过我国几十年来对高坎面流消能的运用经验，这种消能方式还存在一些问题，这主要是由于对它的消能规律认识不足，过分强调了面流消能对下游河床的冲刷作用不大，可以无须防护，可以节省工程投资等优点，而对其引起下游水面的剧烈波动，对岸坡的稳定和航运条件都有不利影响等缺点却重视不够。

尽管面流消能还存在一些问题，但是对于兴建于丰水河流、水深较稳定、上下游落差较小的水利枢纽，如采用底流消能，因施工不便，费用较大；如采用挑流消能，因流速小，水股不能起挑，或虽

能起挑而挑距太短，则采用面流消能就比较适宜。

一、高坎面流消能简介

根据坎高 c 和单宽流量 q 的不同，当坎角 $\theta = 0°$（可以推广至 10°），下游水深 h_t 由小到大时，可能出现如图 11.14 所示的四种演变序列。出现四种演变序列的条件及流态为：

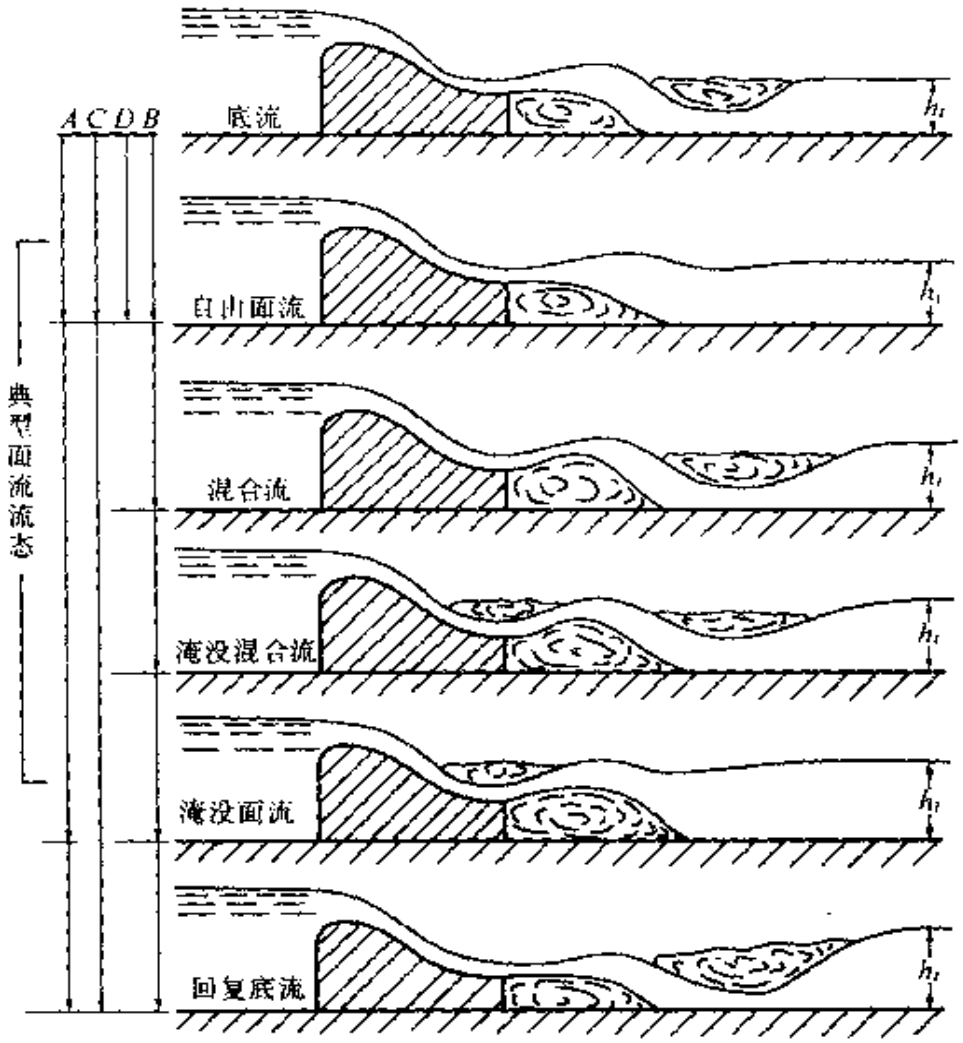


图 11.14

1. A 序列：当 q 较小，坎高 $c > c_{min}$（可以发生面流的最小坎

高），$c_{min}=0.4h_c\sqrt{\frac{T_0}{h_c}-1.5}$时，依次出现底流→自由面流→淹没面流→回复底流；

2.B序列：当 q 较大，$c>c_{min}$时，依次出现底流→自由面流→混合流→淹没混合流→淹没面流→回复底流；

3.C序列：当 $c<c_{min}$时由底流转变为回复底流，不发生典型面流流态；

4.D序列：$c/a_1<0.2$（a_1 为下游坝高），呈现底流与自由面流往复出现的交替流。

可见B序列是完全的演变序列。各型流态中，以自由面流、混合流、淹没混合流和淹没面流为典型的面流流态。

面流的水流现象是复杂多变的，受单宽流量、坎高和下游水深等的影响较大，要使下泄水流保持面流的流态，必须有足够的水深，即下游水深 h_t 应大于产生淹没底流时的最大水深 h_1（即 $h_t>h_1$），而且水深变化幅度不可太大，同时下游水深还必须小于发生回复底流时的最小水深。

从消能观点来看，最有利的是出现自由面流和淹没面流，其次是混合流，不利和不允许出现的是底流和回复底流，因为底流的最大流速靠近河床表面，对河床会产生严重冲刷。例如某溢流坝，由于设计不当，以至在1970年10月宣泄单宽流量 $q=30.8\ m^2/s$ 时，产生回复底流，坝下游300 m内砂层全部冲走，48 m宽的鼻坎崩塌。

面流水力计算尚不成熟，停留在经验阶段，读者如有需要可以参考有关书籍*。

二、消力戽消能简介

消力戽是指泄水建筑物末端具有较大反弧半径和挑角的挑坎

---

* 郭子中．消能防冲原理与水力设计，科学出版社，1982。

(亦称戽斗)如图 11.13(b)所示。

(一)流态

我国陕西省水利科学研究所对消力戽的流态进行了研究,其研究成果与国内外研究的一些成果基本一致。无论是坎角 $\theta = 45°$的连续鼻坎或$\theta = 15° \sim 45°$的差动式鼻坎,其戽底高程都与河床基本齐平。随着下游水深 h_t 由小增大,消力戽的流态演变将如图 11.15 所示。各种流态的发生条件及特征如下。

1. 底流流态

当 $h_t \leqslant h_s$(h_s 为某一界限水深,称为滑出水深)时水股挑出,在水股与河床之间形成空腔,然后产生水跃,如图 11.15(a)所示。也可能出现空腔消失,水跃向消力戽推进,如图 11.15(b)所示。当 $h_s < h_t < h_{t_{min}}$时,除有水跃外,在戽内产生间歇性的小旋涡,如图 11.15(c)所示。以上三种情况均具有底流的一切特征,属底流流态。它表示如 $h_t \leqslant h_s$ 时主流下滑呈远离水跃,故 h_s 称为滑出水深,这并不是消力戽所要求的流态。当 $h_s < h_t < h_{t_{min}}$时水跃虽不远离,但消能作用不显著,也不是消力戽的典型流态。$h_{t_{min}}$称为消力戽典型流态的最小界限水深,消力戽要求 $h_t > h_{t_{min}}$。

2. 典型戽流态

当 $h_{t_{min}} < h_t < h_{t_{max}}$($h_{t_{max}}$称为最大界限水深),消力戽将出现两种典型流态。根据动床试验结果认为,当 $h_t < R$(R 为消力戽反弧半径)时呈现三滚一浪的典型流态,如图 11.15(d)所示;当 $h_t > R$ 时呈现两滚一浪的典型流态,如图 11.15(e)所示。

3. 水舌下坠

当 $h_t > h_{t_{max}}$时,出坎射流水舌下坠,直冲河床,在坎上及下游形成两个旋转方向相同的大旋滚,如图 11.15(f)所示。当 $h_t = h_{t_{max}}$时则呈现不稳定流态,即射流水舌首先下坠,直冲河床,待河床形成较大冲坑后,冲坑内又形成了顺时针的逆向旋滚。当该底部旋滚的作用强烈时,下坠水舌被迫抬高,又恢复了两滚一浪的流

态。待底部旋滚将河床下游砂石卷回冲坑，冲坑被填平后，旋滚作用转弱，水舌又再下坠。如此循环不已，出现两滚一浪和水舌下坠的不稳定的交替流态。

由上述可知，底流流态和水舌下坠都是对消能不利的，所以工程中应保证建筑物下游发生典型消力戽流态，即应满足 $h_{t\,cri\,n} < h_t < h_{t\,max}$ 的条件。

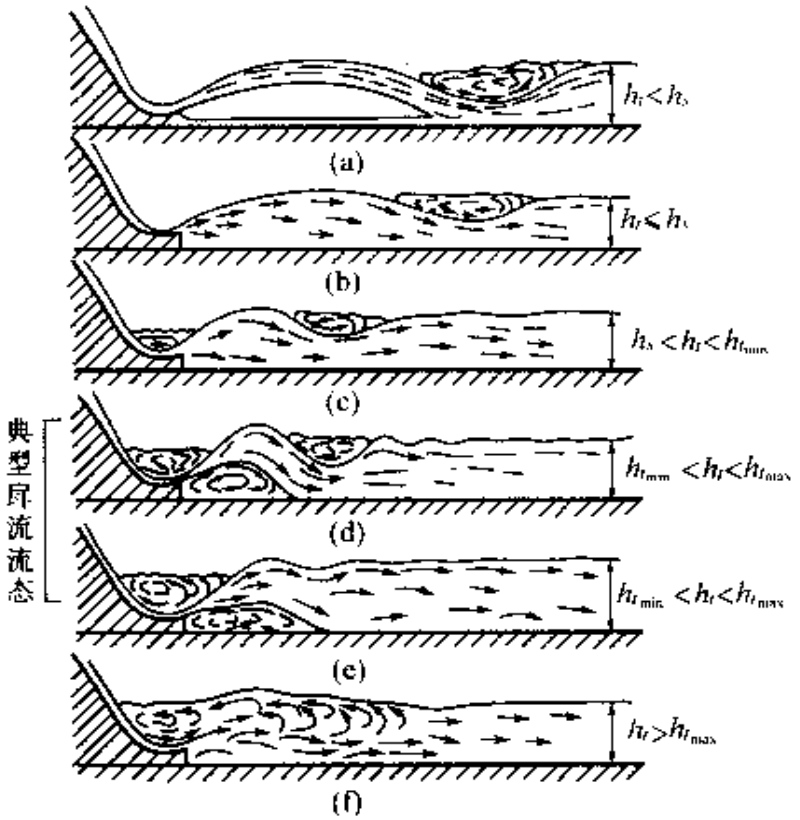


图 11.15

(二)消力戽的水力计算

消力戽的水力计算主要是确定发生典型戽流流态时所需的下游水深。试验表明，最大界限水深 $h_{t\,max}$，最小界限水深 $h_{t\,min}$ 和滑出水深 h_s 均与入流处弗劳德数 Fr，鼻坎反弧半径 R，坎顶与河床的高差等因素有关。参看图 11.16。

1. 计算泄流的 Fr 值

由 $v_1 = \varphi\sqrt{2gz}$（其中 v_1 为泄流到达下游水面时的流速；z 为

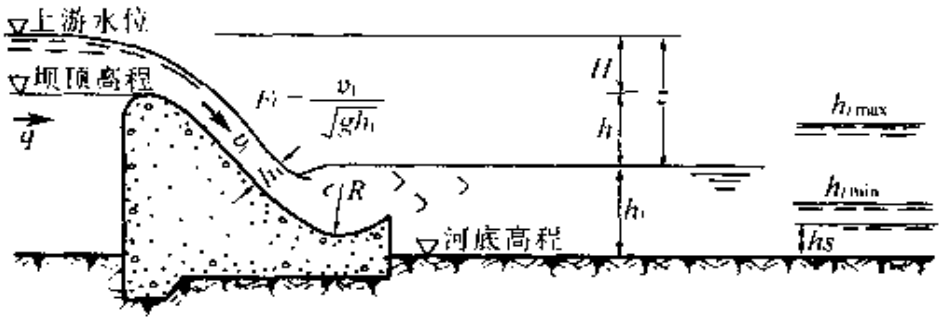


图 11.16

上下游水位差；φ 为流速系数，可由表 11.1 查得）及单宽流量 q 计算水流流入下游水面时的水深 h_1 及 Fr 值：

$$h_1 = \frac{q}{v_1}, \qquad Fr = \frac{v_1}{\sqrt{gh_1}}$$

2. 计算鼻坎反弧半径 R

根据试验，坎顶与河床的相对位置确定后，反弧半径 R 值与 Fr 及$(h_1 + \frac{v_1^2}{2g})$值有关。若已知 Fr，可由图 11.17 查得$\frac{R_{\min}}{h_1 + \frac{v_1^2}{2g}}$。从而算出最小的反弧半径 $R_{\min}$值。

3. 计算各种界限水深

根据实验，各种界限水深与入流水深 h_1 的比值$\frac{h_i}{h_1}$与入流处的 Fr 及$\frac{R}{h_1 + \frac{v_1^2}{2g}}$值有关，可表示为

$$\frac{h_i}{h_1} = f\left(Fr, \frac{R}{h_1 + \frac{v_1^2}{2g}}\right)$$

式中 h_i 可代表 $h_{t_{max}}$、$h_{t_{min}}$或 h_s。根据 Fr 及$\frac{R}{h_1 + \frac{v_1^2}{2g}}$，可由图 11.17 查得$\frac{h_i}{h_1}$，从而求出最大界限水深 $h_{t_{max}}$，最小界限水深 $h_{t_{min}}$或滑出水

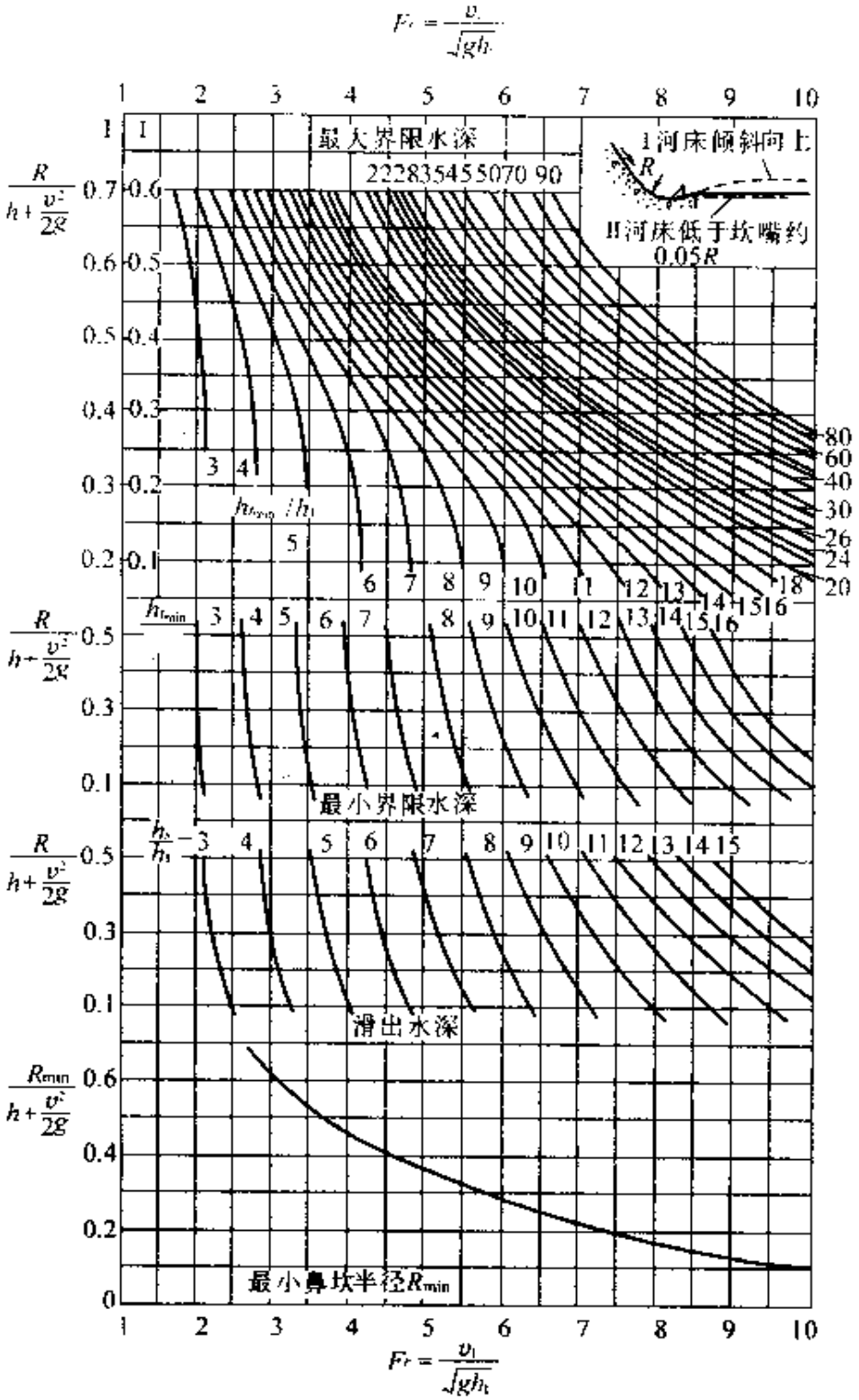

$Fr=\frac{v_c}{\sqrt{gh_c}}$
I
最大界限水深
22283545 5070 90
I 河床倾斜向上
II 河床低于坎嘴约 0.05R
$\frac{R}{h+\frac{v^2}{2g}}$
$h_{c_{min}}/h_1$
$h_{c_{min}}$
最小界限水深
$\frac{h_2}{h_1}$
滑出水深
$\frac{R_{min}}{h+\frac{v^2}{2g}}$
最小鼻坎半径R_{min}
$Fr=\frac{v_1}{\sqrt{gh_1}}$

图 11.17

深 h_s。

例 11.4 某河床式溢洪道，设计最大泄洪流量 $Q=510\ m^3/s$，流速系数 $\varphi=0.94$，上下游水位及河床标高如图 11.18 所示。溢洪道净宽为 24.4 m。试确定在下游水深 $h_t=9.7\ m$ 的情况下能否采用消力戽消能？

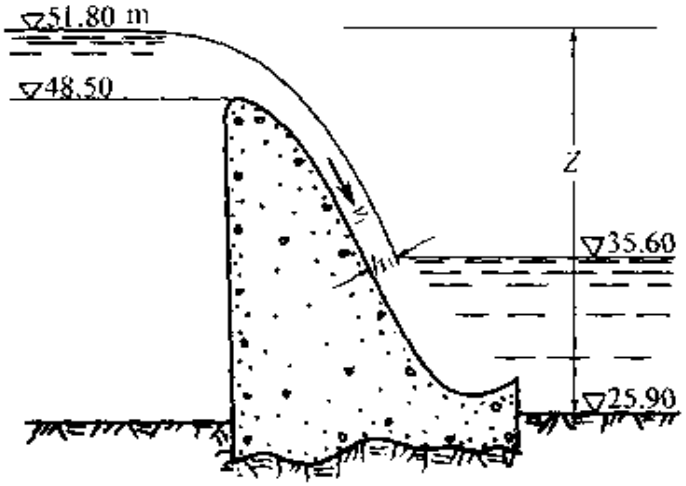


图 11.18

解： (1)求单宽流量

$$q=\frac{Q}{B}=\frac{510\ m^3/s}{24.4\ m}=20.9\ m^2/s$$

(2)求入流 Fr 值

入流流速 $v_1=\varphi\sqrt{2gz}$，而 $z=51.8\ m-35.6\ m=16.2\ m$，故

$$v_1=0.94\sqrt{2\times 9.81\ m/s^2\times 16.2\ m}=16.6\ m/s$$

$$\frac{v_1^2}{2g}=\frac{(16.6\ m/s)^2}{19.62\ m/s^2}=14.12\ m$$

$$h_1=\frac{q}{v_1}=\frac{20.9\ m^2/s}{16.6\ m/s}=1.26\ m$$

所以

$$Fr=\frac{v_1}{\sqrt{gh_1}}=\frac{16.6\ m/s}{\sqrt{9.81\ m/s^2\times 1.26\ m}}=4.75$$

(3)求反弧半径 R

$$h_1+\frac{v_1^2}{2g}=1.26\ m+\frac{(16.6\ m/s)^2}{19.62\ m/s^2}=15.38\ m$$

由 $Fr=4.75$ 查图 11.17 得

$$\frac{R_{\min}}{h_1 + \frac{v_1^2}{2g}} = 0.38$$

则 $R_{\min} = 0.38 \times 15.38\ \text{m} = 5.85\ \text{m}$，采用 $R = 6\ \text{m}$

(4)求各种界限水深

由 $Fr = 4.75$ 及 $\frac{R}{h_1 + \frac{v_1^2}{2g}} = \frac{6\ \text{m}}{15.38\ \text{m}} = 0.39$，查图 11.17 得 $h_{t_{\min}}/h_1 = 7.2$，所以

$$h_{t_{\min}} = 7.2 \times h_1 = 7.2 \times 1.26\ \text{m} = 9.07\ \text{m}$$

同时由该图查得 $h_{t_{\max}}/h_1 = 13$(在河床低于坎嘴约 $0.05R$ 的情况下)，所以

$$h_{t_{\max}} = 13 \times h_1 = 13 \times 1.26\ \text{m} = 16.38\ \text{m}$$

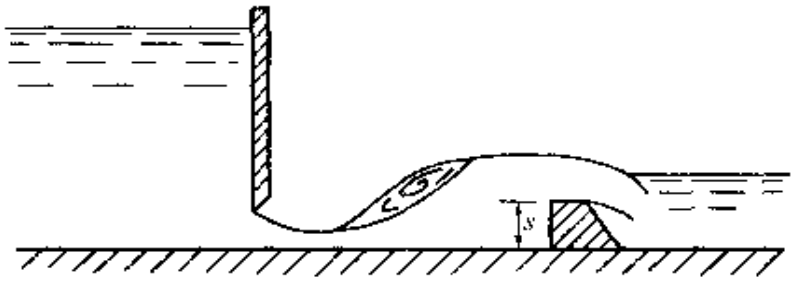
因为下游水深 $h_t = 9.7\ \text{m}$，可知 $h_{t_{\min}} < h_t < h_{t_{\max}}$，满足发生消力戽典型流态的要求，故可以采用消力戽消能。

作为泄水建筑物下游水流衔接和消能的基本知识，本章阐述了三种消能方式。为了增加消能效果，在上述三种消能方式的基础上，常另外采用一些措施。例如，把面流、挑流或消力戽的挑流鼻坎设计成差动式鼻坎(即高低交错的鼻坎)或在鼻坎上设置差动式齿坎，以分散水流；或者在消力池中设计一些辅助消能工，如交错排列的消力墩，使水流在平面和立面上加以分散，从而产生更多的旋滚，增加消能效果。具体措施可参考有关专著或论文，本章不再详述。

此外，就水利枢纽的平面布置而言，当泄水建筑物的布置对河渠中心线而言不对称，或者多闸孔水利枢纽在闸门部分开启时，经泄水建筑物下泄的水流(主流)就会向一侧偏折，而在另一侧形成回流，称这种水流为折冲水流。折冲水流可以导致河床和河岸的局部冲刷和淤积，影响水电站的正常运行以及船舶的正常航运等。因此，在水利枢纽的总体布置中，对折冲水流也应给予足够的重视，具体情况将在专业课中讨论。

习　题

11.1　一泄水闸采用消力墙消能，如图所示。闸门开度一定，按设计流量，保证产生临界水跃情况下，算出墙高为 s。若上游来流量及过闸流量减小，闸门开度不变，问池中形成何种形式水跃？为什么？如上游来流量及过闸流量仍为设计流量而闸门开度小了些，池中又将是什么形式的水跃？为什么？



题 11.1 图

11.2　有一水闸，采用消力墙消能，墙高计算后为 s，如在下游再次出现远离水跃时，应采取那些措施？

11.3　在矩形断面河道上建一溢水坝，已知 $T_0 = 20$ m，坝的流速系数 $\varphi = 0.95$，$q = 4.0$ m^2/s，求坝下游的 h_{c0} 及 h_{c0_2}。

11.4　在矩形河道中筑溢水坝，坝顶宽 b 等于河宽 B，已知坝顶水头 $H = 3.0$ m，坝高 $a_1 = 10$ m，流速系数 $\varphi = 0.95$，流量系数 $m = 0.49$，下游水深 $h_t = 4.0$ m，试判别下游发生何种水跃？

11.5　在矩形断面河渠中，筑一曲线型溢流堰，已知溢流坝共 10 孔，每孔宽为 6.0 m，下游坝高 $a_1 = 12.5$ m，流量系数 $m = 0.485$，侧收缩系数 $\varepsilon = 0.95$，溢流坝顶水头 $H = 2.8$ m，流速系数 $\varphi = 0.95$，下游水深 $h_t = 5$ m，判别是否要做消能工，如需要，试设计消力池的深度和长度。

11.6　在上题同样的条件下，试设计消力墙的高度和池长。

11.7　如将第 5 题改为挑流消能，设挑流坎高度 $e = 5$ m，坝顶与坎顶高差为 7.5 m，挑射角 $\alpha = 25°$，下游水深 $h_t = 5$ m，试计算挑距 L_1 及冲刷坑深度 h_p。

第十二章　渗　　流

第一节　概　述

由颗粒状或碎块状材料组成，并含有许多孔隙或裂隙的物质称为孔隙介质。流体在孔隙介质中的流动称为渗流。通常，在地面以下的土壤或岩石中的渗流又称为地下水运动。渗流理论在国民经济的各个部门，例如水利工程、地质、采矿、石油、环境保护等各个部门都得到广泛的应用。本章研究恒定渗流的基本规律，并应用这些规律来分析和解决工程中的渗流问题。主要内容有渗流流速、渗流流量、压强分布及浸润线等。

第二节　土壤的分类，渗流模型

一、土壤的分类

为了研究渗流的运动规律，首先对土壤进行分类。按土壤各点处同一方向透水性能是否相同把土壤分为均质土壤和非均质土壤两类。各点处同一方向透水性能相同的土壤称为均质土壤；反之为非均质土壤。按土壤同一点处各个方向透水性能是否相同，又将土壤分为各向同性土壤和各向异性土壤两类。同一点处各个方向透水性能相同的土壤称为各向同性土壤；反之为各向异性土壤。严格地讲，只有等直径圆球颗粒规则排列的土壤才是均质各向同性的土壤。而实际土壤的情况都非常复杂，为了使问题简化，在能够满足工程精度要求的情况下，常假定研究的土壤是均质和各向同性的，本章主要讨论这种土壤，以作为研究解决复杂问题的基础。

有时在渗流区中包括若干层透水能力各不相同的土层，这种

土壤称为层状土壤。对于层状土壤的每一层来说，可以当作均质各向同性土壤，见图 12.1。图中各 k 值是代表该层土壤透水性能大小的系数，称为渗流系数，具体的将稍后介绍。

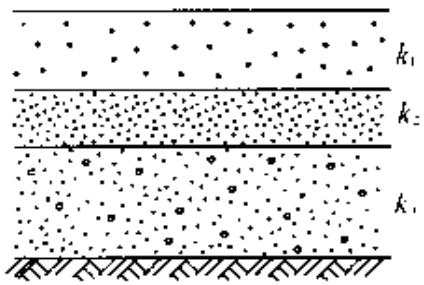


图 12.1

二、水在土壤中的形态

水在土壤中存在的形态可分为汽态水、附着水、薄膜水、毛管水和重力水五类。汽态水是以水蒸汽的形式悬浮在土壤孔隙中，其数量极少。附着水和薄膜水都是由于水分子与土壤颗粒分子之间的吸引作用而包围在土壤颗粒四周的水分，这两者又称为结合水，很难移动，且数量也很少。毛管水是由于毛细管作用保持在土壤孔隙中，它受分子力和重力的作用，可以在土壤孔隙中移动。重力水充满在土壤孔隙中，受重力作用而流动。汽态水、附着水、薄膜水和毛管水对渗流问题的影响甚微，可不予考虑。本章仅讨论重力水的流动规律，并把重力水的液面看成是渗流的自由液面。渗流的自由液面称为浸润面，其表面压强为大气压强。

三、渗流模型

土壤孔隙的形状、大小及其分布情况是十分复杂的，渗流中水质点的运动轨迹也是很不规则的，无论是理论分析或实验研究，要确定水在土壤孔隙中流动的真实情况是很困难的，但在工程问题中，往往不需要了解孔隙中具体的渗流情况，因此，常采用一种假想的渗流来代替真实的渗流，这种假想的模型称为渗流模型。

渗流模型不考虑渗流在土壤孔隙中流动途径的迂回曲折，只考虑渗流的主要流向，并认为渗流的全部空间（土壤和孔隙的总和）均被渗流所充满。由于渗流模型把渗流的全部空间看作被水体所充满的连续介质，渗流的运动要素在渗流区域内是连续变化

的，因此对渗流模型，可以应用以连续函数为基础的数学分析这一工具。

为了使假想的渗流模型在水力特征方面和真实渗流相一致，渗流模型必须满足下列条件：

1. 对于同一过水断面，模型的渗流量等于真实的渗流量；

2. 作用于模型中某一作用面上的渗流压力等于真实的渗流压力；

3. 模型中任意体积内所受的阻力等于同体积内真实渗流的阻力，也就是说两者水头损失相等。

应当指出，渗流模型中的流速与真实渗流的流速是不相等的。在模型中，通过微小过水断面面积 ΔA 的渗流流量为 ΔQ，则该面积的渗流平均流速为

$$v = \frac{\Delta Q}{\Delta A}$$

而实际的渗流只是发生在 ΔA 面积内的孔隙中，设孔隙面积为 $\Delta A'$，则实际渗流平均流速为

$$v' = \frac{\Delta Q}{\Delta A'}$$

v 与 v' 的关系为

$$\frac{\Delta A'}{\Delta A} \cdot v' = nv' \tag{12.1}$$

式中 n 为土壤的孔隙率。若土壤是均质的，则面积孔隙率与体积孔隙率相等。因为孔隙率 $n < 1.0$，所以 $v < v'$，即模型渗流流速小于真实渗流流速。一般不加说明，渗流流速是指模型中的渗流流速。

由于采用渗流模型，前面各章关于分析连续介质运动要素的各种概念均可直接应用于渗流。例如按运动要素是否随时间变化，可以分为恒定渗流与非恒定渗流；按运动要素是否沿程变化，可以分为均匀渗流与非均匀渗流；非均匀渗流又可分为渐变渗流与急变渗流；按有无自由液面又可分为无压渗流与有压渗流等。

本章只讨论恒定渗流。

渗流的流速往往很小，通常不超过每秒几毫米，因而其动能可以忽略不计。这样，在通常情况下，渗流的机械能就等于势能；单位机械能 E 就等于单位势能 E_p 并等于单位位能 z 和单位压能 $\frac{p}{\rho g}$ 之和，也就是测管水头 H，其关系可写为

$$E = E_p = z + \frac{p}{\rho g} = H \tag{12.2}$$

由此推论，渗流的总水头线与测管水头线（或浸润线）重合，并且只能沿程下降。

第三节　达西定律

早在 1856 年，法国水利工程师达西（H. Darcy）在 1852 ~ 1855 年间进行大量实验的基础上，总结得出渗流水头损失与渗流流速、流量之间的基本关系式，称为达西定律。

一、达西定律

达西实验的装置如图 12.2 所示，装置的主要部分是一个上端开口的直立圆筒。圆筒侧壁装有高差为 l 的上下两根测压管。筒底装一滤板 D，滤板以上装入颗粒均匀的砂土。水由引水管 A 自圆筒 G 上端注入，多余的水从溢水管 B 排出，以保证筒内水位恒定。由于圆筒直径和渗流的作用水头不变，故为恒定均匀渗流，流量为 Q。水经过土壤渗至筒底，再从管 C 流入量杯 F，在时段 t 内，流入量杯中的水体体积为 V，则渗流流量为

$$Q = \frac{V}{t}$$

同时测读 1，2 两断面的测管水头 $H_1 = z_1 + \frac{p_1}{\rho g}$ 和 $H_2 = z_2 + \frac{p_2}{\rho g}$。由于是均匀渗流，在 l 流段上渗流的水头损失为

$$h_w = \left(z_1 + \frac{p_1}{\rho g}\right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\rho g}\right) = H_1 - H_2 = -\Delta H$$

实验表明，对不同直径的圆筒和不同类型的土壤，通过的渗流量 Q 均与圆筒的横断面积 A 及水头损失 h_w 成正比，与两断面间的距离 l 成反比，即

$$Q \propto A \frac{h_w}{l}$$

引入比例系数 k，而 $\frac{h_w}{l} = J$ 为水力坡度，于是渗流量为

$$Q = kA \frac{h_w}{l} = kAJ \tag{12.3}$$

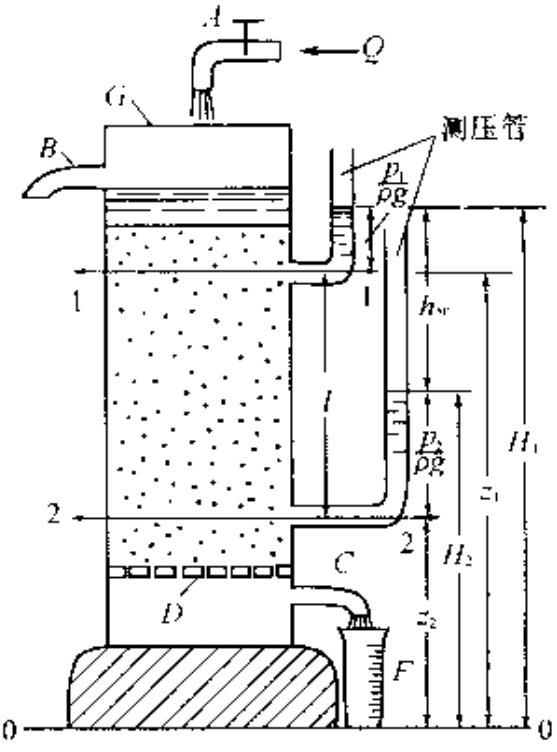


图 12.2

渗流的平均流速为

$$v = kJ \tag{12.4}$$

式(12.3)或式(12.4)称为达西定律，它是渗流的基本定律。

达西定律表明，渗流流速 v 或流量 Q 与水力坡度 J 的一次方成比例。式中 k 为反映土壤透水性能的一个综合系数，称为渗流系数，其量纲与速度的量纲相同。由式(12.4)可知，当 $J = 1$ 时 $k = v$，所以渗流系数可理解为水力坡度 J 等于 1 时的渗流速度。

达西实验中的渗流为均匀渗流，各点的运动状态相同，任意空间点处的渗流流速 u 等于断面平均流速 v；又由于水力坡度 $J = -\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}s}$，故达西定律又可写为

$$u = v = kJ = -k \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}s} \tag{12.5}$$

$$Q = kAJ = -kA \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}s} \tag{12.6}$$

二、达西定律的适用范围

达西实验是用均匀砂土在均匀渗流条件下进行的。经后人的大量实验研究，认为可将它推广应用于其他土壤。但进一步研究表明，在某些情况下，渗流并不符合达西定律，达西定律有一定的适用范围。

渗流与管流、明渠水流一样，也有层流和紊流之分。由达西定律(12.4)可知

$$h_w = \frac{l}{k}v \tag{12.7}$$

式(12.7)表明，渗流的水头损失与平均流速的一次方成正比。可见达西定律只适用于层流，具有线性规律。对于大颗粒大孔隙中的渗流，由于流速较大，可能发生紊流。渗流的流态，也可用雷诺数来判别。常用的渗流雷诺数为

$$Re = \frac{v \cdot d_{10}}{\nu} \tag{12.8}$$

式中 d_{10}为直径比它小的颗粒占全部土重 10%时的土壤颗粒直径，称为有效粒径；ν 为水的运动粘度；v 为渗流流速。

由于土壤孔隙的大小、形状、方向、分布等情况十分复杂，而且变化范围较大，各种孔隙内渗流流态的转变也不是同时发生的，从整体来看，由服从达西定律的层流渗流转变为紊流渗流是逐渐的，没有一个明显的界限。实验表明，线性渗流(层流)雷诺数的变化范围为

$$Re = \frac{vd_{10}}{\nu} < 1 \sim 10 \tag{12.9}$$

绝大多数细颗粒土壤中的渗流都属于层流。但是卵石、砾石等大颗粒土壤中的渗流有可能出现紊流，属于非线性渗流。渗流流速的一般表达式可写成

$$v = kJ^{\frac{1}{m}} \tag{12.10}$$

式中，当 $m=1$ 时为层流渗流；当 $m=2$ 时，为粗糙区渗流；当 $m=1\sim2$ 时，则为从层流到紊流的过渡区渗流。

三、渗流系数及其确定方法

渗流系数 k 是综合反映土壤透水能力大小的系数，与土壤及液体的性质有关，例如与土壤颗粒的级配、形状、分布以及液体的粘度、密度等有关。k 值对于渗流的计算有着十分重要的意义，一般可用下述方法来确定。

1. 实验室测定法

在天然土壤中取土样，使用如图 12.2 所示的达西实验装置，测定水头损失 h_w 与渗流量 Q，用式(12.3)可求得 k 值。由于被测定的土样只是天然土壤中的一小块，而且取样和运送时还可能破坏原土壤的结构，因此，取土样时应尽量保持原土壤的结构，并取足够数量的具有代表性的土样进行测定，才能得到较为可靠的 k 值。

2. 现场测定法

一般是在现场钻井或挖试坑，往其中注水或从中抽水，在注水或抽水的过程中，测得流量 Q 及水头 H 值，然后应用有关公式计算渗流系数值。此法虽不如实验室测定简单易行，但却可使土壤结构保持原状，使测得的 k 值更接近真实值，这是测定 k 值的最有效方法，但此法规模较大，费用多，一般只在重要工程中应用。

3. 经验公式图表法

这一方法是根据土壤颗粒的大小、形状、结构、孔隙率和温度等参数所组成的经验公式来估算渗流系数 k 值。这类公式很多，各有其局限性，只能作粗略估算。

此外，在进行渗流近似计算时，亦可采用表 12.1 中的 k 值。

表 12.1　　各种土壤的渗流系数值

土壤名称	渗流系数 k	
	m/day	cm/s
粘土	<0.005	$<6\times10^{-6}$
亚粘土	0.005～0.1	$6\times10^{-6}\sim1\times10^{-4}$
轻亚粘土	0.1～0.5	$1\times10^{-4}\sim6\times10^{-4}$
黄土	0.25～0.5	$3\times10^{-4}\sim6\times10^{-4}$
粉砂	0.5～1.0	$6\times10^{-4}\sim1\times10^{-3}$
细砂	1.0～5.0	$1\times10^{-3}\sim6\times10^{-3}$
中砂	5.0～20.0	$6\times10^{-3}\sim2\times10^{-2}$
均质中砂	35～50	$4\times10^{-2}\sim6\times10^{-2}$
粗砂	20～50	$2\times10^{-2}\sim6\times10^{-2}$
均质粗砂	60～75	$7\times10^{-2}\sim8\times10^{-2}$
圆砾	50～100	$6\times10^{-2}\sim1\times10^{-1}$
卵石	100～500	$1\times10^{-1}\sim6\times10^{-1}$
无填充物卵石	500～1000	$6\times10^{-1}\sim1\times10$
稍有裂隙岩石	20～60	$2\times10^{-2}\sim7\times10^{-2}$
裂隙多的岩石	>60	$>7\times10^{-2}$

第四节　恒定无压渗流

在自然界中，渗流含水层以下的不透水地基往往是不规则的，为了简便起见，一般假定不透水地基为平面，并以 i 表示其坡度，称为底坡。在底坡为 i 的不透水地基上的无压渗流与地面上的明渠水流相似，可视为地下明渠渗流。如果渗流地域广阔，过水断面可以看作是宽阔的矩形，一般可按平面运动处理。

无压渗流的自由液面称为浸润面，顺流向所作的铅垂面与浸润面的交线称为浸润线。

与明渠水流相似，无压渗流可以是均匀渗流，也可以是非均匀渗流。非均匀渗流又可分为渐变渗流和急变渗流。本节主要阐述达西定律在无压均匀渗流中的形式、渐变渗流的一般公式以及不同底坡中无压渐变渗流浸润线的分析和计算。

一、无压均匀渗流

均匀渗流(见图 12.3)的水深 h_0 沿程不变，断面平均流速 v 也沿程不变，同时，水力坡度 J 和底坡 i 相等，即 $J = i$。由达西定律，断面平均流速为

$$v = kJ = ki \tag{12.11}$$

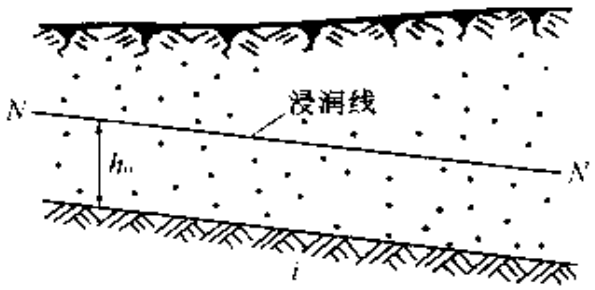


图 12.3

通过断面的渗流流量为

$$Q = kA_0 i$$

式中 A_0 为相应于正常水深 h_0 时的过水断面面积。

当宽阔渗流的宽度为 b 时，均匀渗流的流量为

$$Q = kA_0 i = kbh_0 i \tag{12.12}$$

相应的单宽流量为

$$q = kh_0 i \tag{12.13}$$

二、渐变渗流的一般公式——裘皮幼公式

图 12.4 所示为一渐变渗流，以 0－0 为基准面，取相距为 ds 的两个过水断面 1 和 2。对于渐变渗流，流线近似于平行，过水断面近似为平面，两断面间所有流线的长度 ds 近似相等，水力坡度 $J = \dfrac{H_1 - H_2}{\mathrm{d}s} = -\dfrac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}s}$ 也近似相等，因此，过水断面上各点的流速 u 近似相等，并等于断面平均流速 v，即

$$u = v = -k\frac{dH}{ds} = kJ \tag{12.14}$$

式(12.14)为渐变渗流的一般公式，称为裘皮幼公式。

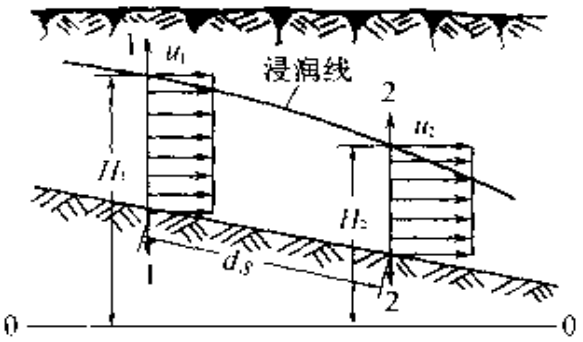


图 12.4

裘皮幼公式与达西定律〔式(12.5)〕在形式上相同。但达西定律应用于均匀渗流，各断面的 J 都相同；而裘皮幼公式应用于渐变渗流，不同断面的 $J = \frac{H_1 - H_2}{ds} = -\frac{dH}{ds}$ 不同，流速分布虽然为矩形，但不同过水断面上的流速大小不同，如图 12.4 所示。

三、无压渐变渗流的微分方程

渐变渗流的微分方程可用裘皮幼公式来推导。不透水层坡度为 i，对于任一过水断面 $H = z_0 + h$。式中 z_0 为渠底高程，h 为渗流水深，则

$$\frac{dH}{ds} = \frac{dz_0}{ds} + \frac{dh}{ds}$$

因渠底坡度 $i = -\frac{dz_0}{ds}$，故

$$J = i - \frac{dh}{ds}$$

根据裘皮幼公式，断面平均流速为

$$v = kJ = k\left(i - \frac{dh}{ds}\right)$$

渗流流量为

$$Q = kA\left(i - \frac{dh}{ds}\right) \tag{12.15}$$

式(12.15)为无压渐变渗流的微分方程。

四、浸润线的形状和计算

分析渗流浸润线形状的方法与分析明渠水面曲线形状的方法(见第九章)相似。所不同的是渗流的流速水头可以忽略不计,断面单位能量 E_s 就等于渗流水深 h,E_s 随水深 h 呈线性变化,不存在极小值,或者说,其极小值为零,因此渗流中不存在临界水深,也就无所谓临界底坡。这样,在不透水层坡度上仅有正坡、平坡、负坡这三种底坡。

在正坡渠道上可以发生均匀渗流,其正常水深为 h_0,渗流水深 h 的变化范围有两种情况:$h > h_0$ 和 $h < h_0$。对于平坡和负坡,不能发生均匀渗流不存在 h_0,渗流水深的变化范围只有 $0 < h < \infty$ 一种情况。由此可知,渗流的浸润线共有四种形状。它们是正坡上的两种,平坡上的一种和负坡上的一种。下面分别进行讨论。

1. 正坡($i > 0$)

正坡上可以发生均匀流,其正常水深等于 h_0。恒定流,流量一定,式(12.12)和式(12.15)右端相等,即

$$kA_0 i = kA\left(i - \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}s}\right)$$

或

$$kh_0 i = kh\left(i - \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}s}\right)$$

上两式中 A_0、h_0 和 A、h 分别为均匀流和渐变流的过水断面面积和水深。

令 $\eta = \frac{h}{h_0}$,上式变为

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}s} = i\left(1 - \frac{1}{\eta}\right) \tag{12.16}$$

上式可用于分析正坡上浸润线的形状。

正坡上,正常水深的 NN 线将渗流区分为两个区。NN 线以上,水深 $h > h_0$ 称为 P_1 区;NN 线以下,水深 $h < h_0$,称为 P_2 区。如图 12.5 所示。

对于 P_1 区，$h > h_0$，$\eta > 1.0$，由式(12.16)可知，$\frac{dh}{ds} > 0$，表示渗流水深沿程增加，浸润线为壅水曲线。向上游，水深 h 越来越小，当 $h \to h_0$ 时，$\eta \to 1.0$，则 $\frac{dh}{ds} \to 0$，表示水深 h 沿程趋于不变，即浸润线上游以 N-N 线为渐近线。向下游，水深 h 越来越大，当 $h \to \infty$ 时，$\eta \to \infty$，则 $\frac{dh}{ds} \to i$，表示浸润线下游以水平线为渐近线。所以 P_1 型浸润线为下凹形壅水曲线，如图12.5所示。

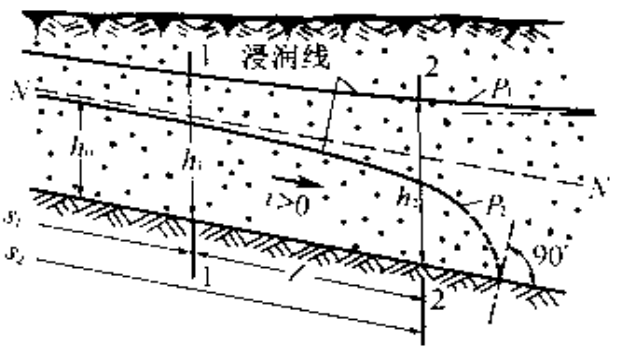


图 12.5

对于 P_2 区，$h < h_0$，$\eta < 1.0$，则 $\frac{dh}{ds} < 0$，浸润线为降水曲线。浸润线越向上游，水深越大，当 $h \to h_0$ 时，$\eta \to 1.0$，$\frac{dh}{ds} \to 0$，即浸润线上游以 N-N 线为渐近线。浸润线越向下游，水深越小，当 $h \to 0$ 时，$\eta \to 0$，则 $\frac{dh}{ds} \to -\infty$，表示浸润线与底坡有正交的趋势。因此 P_2 型浸润线为上凸形降水曲线，见图 12.5。实际观察表明，在水深极小时，浸润曲线并没有与底坡正交的现象，因为此时流线的曲率很大，水流已不符合渐变渗流的条件，而属于急变渗流，式(12.16)不再适用。实际浸润线的末端最小水深应取决于具体的边界条件。

以上分析了正坡上两条浸润线的形状，若对式(12.16)积分，可得浸润线方程。因 $h = \eta h_0$，则 $dh = h_0 d\eta$，代入式(12.16)得

$$\frac{h_0 d\eta}{ds} = i\left(1 - \frac{1}{\eta}\right)$$

分离变量得

$$\frac{i ds}{h_0} = d\eta + \frac{d\eta}{\eta - 1}$$

从断面 1 到断面 2 积分上式得

$$s_2 - s_1 = l = \frac{h_0}{i}\left(\eta_2 - \eta_1 + \ln\frac{\eta_2 - 1}{\eta_1 - 1}\right) = \frac{h_0}{i}\left(\eta_2 - \eta_1 + 2.3\lg\frac{\eta_2 - 1}{\eta_1 - 1}\right) \tag{12.17}$$

式中 l 为断面 1 到断面 2 的距离。该式为正坡上无压渐变渗流浸润线方程，可用以进行浸润线计算。

例 12.1 某渠道与河道平行，中间为透水土层，如图 12.6 所示。已知不透水层底坡 $i = 0.025$，土层的渗透系数 $k = 0.002$ cm/s，河道与渠道之间距离 $l = 300$ m，上端入渗水深 $h_1 = 2.0$ m，下端出渗水深 $h_2 = 4.0$ m。试求单宽渗流量 q，并计算浸润线。

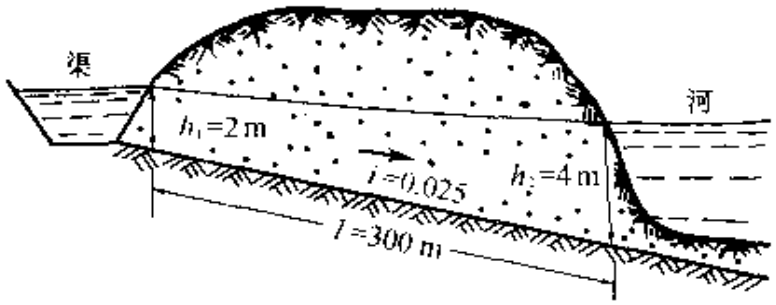


图 12.6

解： 该渗流为恒定无压渐变渗流。因底坡 $i = 0.025 > 0$，又 $h_2 > h_1$，则浸润线为 P_1 型壅水曲线。

单宽流量 $q = kh_0 i$，若能求出 h_0，则可求得 q。而在式(12.17)中 i, l, h_1, h_2 均已知，只有 h_0 未知，因此可用此式求 h_0。改写式(12.17)为下式[注意到式(12.17)中 $\eta_1 = \frac{h_1}{h_0}$，$\eta = \frac{h_2}{h_0}$]

$$h_0\lg\frac{h_2 - h_0}{h_1 - h_0} = \frac{1}{2.3}(il - h_2 + h_1)$$

则上式右端各项为已知，左端为 h_0 的函数。

将已知值代入右端得

$$\frac{1}{2.3}(il - h_2 + h_1) = \frac{1}{2.3} \times (0.025 \times 300\ \text{m} - 4.0\ \text{m} + 2.0\ \text{m}) = 2.39\ \text{m}$$

左端为 h_0 的函数，即

$$\psi(h_0) = h_0\lg\frac{h_2 - h_0}{h_1 - h_0} = h_0\lg\frac{4.0\text{ m} - h_0}{2.0\text{ m} - h_0}$$

设一系列 h_0 值，按上式算出对应 $\psi(h_0)$值，计算结果列入表 12.2 中。按表中数据绘出 $h_0 \sim \psi(h_0)$关系曲线如图 12.7。由 $h_0 \sim \psi(h_0)$曲线，当 $\psi(h_0) = 2.39$ m时，$h_0 = 1.89$ m。

表 12.2

h_0(m)	1.70	1.80	1.85	1.90	1.95
$\psi(h_0)$	1.50	1.87	2.14	2.51	3.14

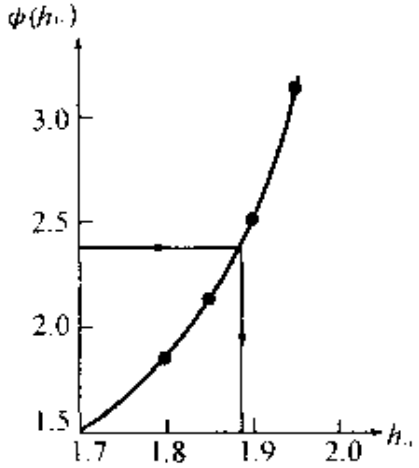


图 12.7

单宽渗流量 $q = kh_0 i = 0.002\text{ cm/s} \times 189\text{ cm} \times 0.025 = 9.43 \times 10^{-3}\text{ cm}^2/\text{s}$

浸润线坐标按式(12.17)计算

$$l = s_2 - s_1 = \frac{h_0}{i}\left[(\eta_2 - \eta_1) + 2.3\lg\frac{\eta_2 - 1}{\eta_1 - 1}\right]$$

式中 $h_0/i = 75.6$ m，$\eta_1 - 1 = h_1/h_0 - 1 = 1.060 - 1 = 0.060$。设不同的 h_2 计算相应的 l，计算结果列于表 12.3，按表中数据可绘制浸润线。

表 12.3

h_1(m)	h_2(m)	$\eta_2 = \frac{h_2}{h_0}$	$\frac{\eta_2 - 1}{\eta_1 - 1}$	$2.3\lg\frac{\eta_2 - 1}{\eta_1 - 1}$	l(m)
2.0	2.10	1.113	1.883	0.632	51.7
2.0	2.20	1.166	2.767	1.017	84.7
2.0	2.50	1.326	5.433	1.691	147.7
2.0	3.00	1.591	9.85	2.285	214.4
2.0	3.50	1.856	14.27	2.655	260.3
2.0	4.00	2.121	18.68	2.924	300.0

2. 平坡($i=0$)

在平坡上不可能出现均匀渗流,无正常水深 NN 线,所以浸润线只有一种形式,称为 H 型曲线。以 $i=0$ 代入式(12.15)中,得

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}s} = -\frac{Q}{kA} \tag{12.18}$$

由于上式中 Q, k, A 均为正值,因此,无论实际水深 h 为多少,必有$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}s}<0$,浸润线只能是水深沿程减小的降水曲线。曲线上端的水深 h 由具体边界条件决定,理论上可达无限大,当 $h\to\infty$ 时,$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}s}\to 0$,表示浸润线上游端以水平线为渐近线。浸润线下游端,水深越来越小,当 $h\to 0$ 时,$A\to 0$,$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}s}\to -\infty$,表示浸润线与底坡有正交的趋势,由前面的分析可知,此时已不是渐变渗流。由上分析可知,H 型浸润线为上凸形降水曲线,如图 12.8 所示。

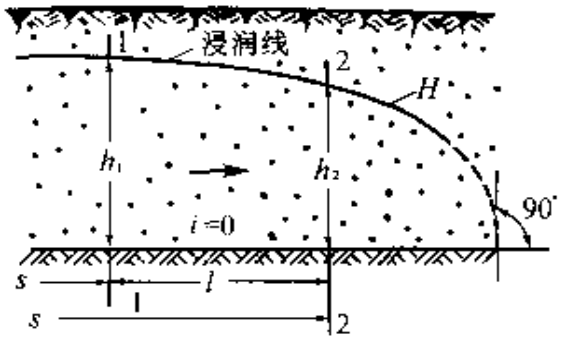


图 12.8

积分式(12.18)可得平坡上的浸润线方程。设渗流断面为矩形,$A=bh$,$Q=bq$,将其代入式(12.18),并分离变量得

$$\mathrm{d}s = -\frac{k}{q}h\,\mathrm{d}h$$

由断面 1 到断面 2 积分上式得

$$l = \frac{k}{2q}(h_1^2 - h_2^2) \tag{12.19}$$

上式为平坡无压渐变渗流浸润线方程,可用以计算平坡渗流的浸润线及有关渗流量。

例 12.2 在水平不透水层上设一条长 $L=150$ m 的集水廊道(垂直于纸面)用以取水,如图 12.9 所示。已知廊道内水深 $h=3.0$ m,距廊道壁 $l=200$ m 处的含水层深 $H=8.0$ m。土壤为细砂,其渗流系数 $k=4\times10^{-5}$ m/s。求

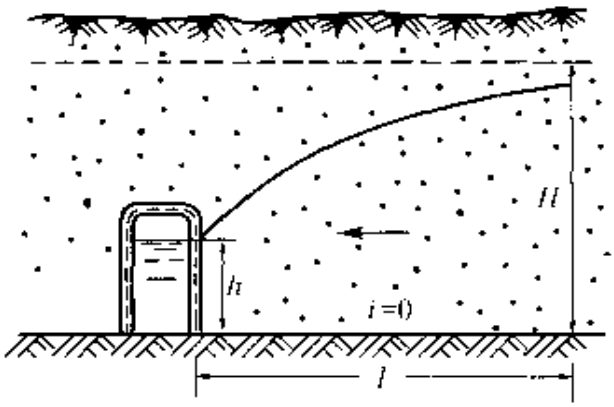


图 12.9

廊道的集水流量 Q。

解： 廊道每侧的单宽渗流量为 q。由式(12.19)可得

$$q = \frac{k}{2l}(H^2 - h^2)$$

$$= \frac{4 \times 10^{-5}\ \text{m/s}}{2 \times 200\ \text{m}}[(8.0\ \text{m})^2 - (3.0\ \text{m})^2]$$

$$= 0.55 \times 10^{-5}\ \ \text{m}^2/\text{s}$$

每侧的集水流量为

$$Q = qL = 5.5 \times 10^{-6}\ \ \text{m}^2/\text{s} \times 150$$

$$= 8.25 \times 10^{-4}\ \ \text{m}^3/\text{s}$$

总的集水流量为

$$Q = 2 \times 8.25 \times 10^{-4}\ \ \text{m}^3/\text{s} = 1.65 \times 10^{-3}\ \ \text{m}^3/\text{s}$$

3. 负坡($i < 0$)

在负坡上不可能发生均匀渗流，无正常水深 $N \sim N$ 线，浸润线只有一种形式，称为 A 型曲线。为了便于分析和计算，假想一个正坡 i'，并令 $i' = -i$，代入式(12.15)得

$$Q = -kA\left(i' + \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}s}\right) \tag{12.20}$$

流量 Q 可用发生在 i' 上的均匀流的流量来表示，其正常水深为 h_0'，则有

$$Q = kA_0'i' \tag{12.21}$$

式中 A_0' 为 i' 上的均匀渗流的过水断面面积。若为矩形断面，则 $A_0' = bh_0'$，$A = bh$，于是(12.20)可改为

$$kbh_0'i' = -kbh\left(i' + \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}s}\right)$$

或

$$\frac{h_0'}{h}i' = -i' - \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}s}$$

令 $\frac{h}{h_0'} = \zeta$，代入上式得

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}s} = -i'\left(1 + \frac{1}{\zeta}\right) \tag{12.22}$$

因 ζ 恒为正值，所以 $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}s} < 0$，浸润线为降水曲线。浸润线越向上游水深越大，当 $h \to \infty$ 时，$\zeta \to \infty$，$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}s} \to -i' = i$，即浸润线上游端以水平线为渐近线。浸润线下游端，当水深 $h \to 0$ 时，$\zeta \to 0$，$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}s} \to -\infty$，表示浸润线下端与底坡有正交的趋势，如前所述，此时已不是渐变渗流。由以上分析可知，A 型浸润线为上凸形降水曲线，如图 12.10 所示。

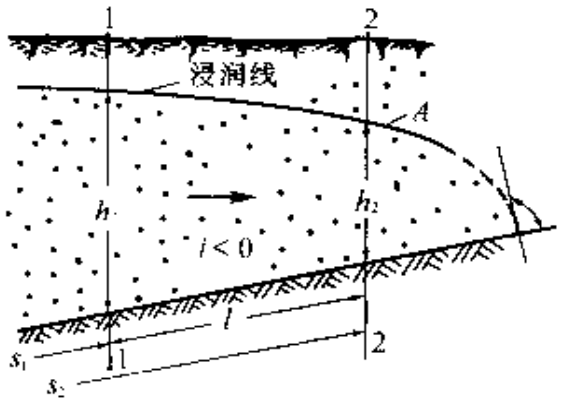


图 12.10

积分式(12.22)可得负坡上的浸润线方程。将 $\mathrm{d}h = h_0'\mathrm{d}\zeta$ 代入式(12.22)得

$$\frac{h_0'\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}s} = -i'\left(1 + \frac{1}{\zeta}\right)$$

分离变量得

$$\mathrm{d}s = -\frac{h_0'}{i'}\left(\frac{\zeta}{1+\zeta}\right)\mathrm{d}\zeta = -\frac{h_0'}{i'}\left(\mathrm{d}\zeta - \frac{\mathrm{d}\zeta}{1+\zeta}\right)$$

从断面 1 到断面 2 积分上式得

$$l = \frac{h_0'}{i}\left(\zeta_1 - \zeta_2 + 2.3\lg\frac{1+\zeta_2}{1+\zeta_1}\right) \qquad (12.23)$$

式中 $\zeta_1 = \frac{h_1}{h_0'}$，$\zeta_2 = \frac{h_2}{h_0'}$。上式为负坡上无压渐变渗流浸润线方程。

第五节　井的渗流

井是常见的用以抽取地下水的建筑物。例如许多地区打井开采地下水，以满足工农业生产和城乡居民用水的需求；工程施工中用打井排水的方法降低地下水位，保证工程顺利进行等。所以，研究井的渗流问题有着实际意义。

井按吸取的是无压地下水还是有压地下水分为普通井（又称潜水井）或承压井（又称自流井）。从透水层吸取无压地下水的井称为普通井，如图 12.11 所示；井身穿过一层或多层不透水层吸取承压水的井称为承压井，如图 12.12 所示。按井底是否到达不透水层可以分为完整井（又称完全井）或不完整井（又称不完全井）。以上两种分类可以组合成普通完整井〔图 12.11(a)〕、普通不完整井〔图 12.11(b)〕、承压完整井〔图 12.12(a)〕、承压不完整井〔图 12.12(b)〕。

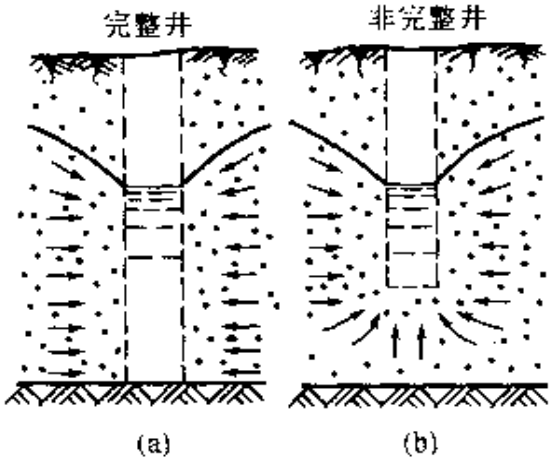


图 12.11

目前，不完整井的计算多采用经验公式。下面主要阐明如何应用裘皮幼公式进行完整井的计算。

一、普通完整井

图 12.13 所示为一水平不透水层上的普通完整井，井的半径为 r_0，含水层厚度为 H。抽水前，井中水位与地下水面齐平。抽水后，井中水面下降，四周地下水汇入井内，井周围地下水

面也逐渐下降。如果抽水流量保持不变，则井中水深 h_0 也保持不变，井周围地下水面也降到某一固定位置，形成一个恒定的漏斗形浸润面。如果含水层为均质各向同性土壤，不透水层为水平面，则渗流流速及浸润面对称于井的中心轴，过水断面是以井轴为中心轴，以 r 为半径的一系列圆柱面，圆柱面的高度 z 就是该断面浸润面的高度。在距井中心较远的 R 处，地下水位下降极微，基本上保持原水位不变，该距离 R 称为井的影响半径，R 值的大小与土层的透水性能有关。

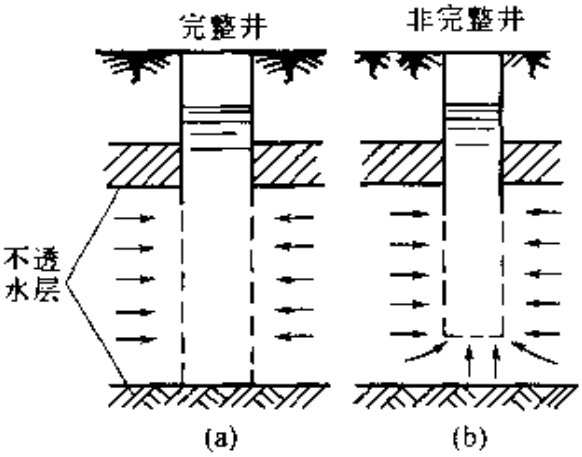


图 12.12

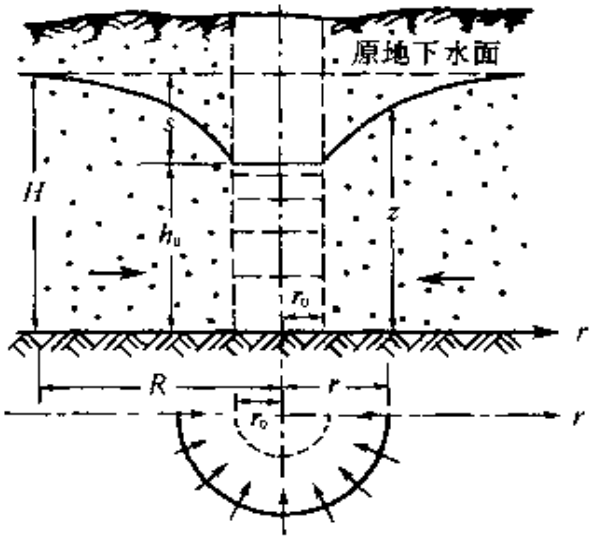


图 12.13

井的渗流，除井壁附近外，流线接近于平行直线，是渐变渗流，可应用裘皮幼公式进行分析和计算。当半径有一增量 $\mathrm{d}r$ 时，纵坐标 z 的相应增量为 $\mathrm{d}z$（如图 12.13 所示，$\mathrm{d}r$ 及 $\mathrm{d}z$ 均为正值），则该断面的水力坡度 J 可表示为

$$J = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}r}$$

断面平均流速为

$$v = kJ = k\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}r}$$

过水断面为一圆柱面，面积 $A = 2\pi rz$，则通过断面的渗流量为

$$Q = vA = k2\pi rz\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}r}$$

或

$$z\mathrm{d}z = \frac{Q}{2\pi k}\frac{\mathrm{d}r}{r}$$

积分上式得

$$z^2 = \frac{Q}{\pi k}\ln r + C$$

式中 C 为积分常数，由边界条件确定。当 $r = r_0$ 时，$z = h_0$，得积分常数 $C = h_0^2 - \frac{Q}{\pi k}\ln r_0$。代入上式得

$$z^2 - h_0^2 = \frac{Q}{\pi k}\ln\frac{r}{r_0} \tag{12.24}$$

或

$$z^2 - h_0^2 = \frac{0.732}{k}Q\lg\frac{r}{r_0}$$

上式为普通完整井的浸润线方程。式中 k, r_0, h_0, Q 为已知，可假设一系列 r 值，算出一系列对应的 z 值，即可绘出浸润线。

当 $r = R$ 时，$z = H$，代入式(12.24)可求得井的渗流量公式为

$$Q = 1.36\frac{k(H^2 - h_0^2)}{\lg\frac{R}{r_0}} \tag{12.25}$$

井的影响半径 R 主要取决于土壤的性质。根据经验，细粒土：$R = 100 \sim 200$ m；中粒土：$R = 250 \sim 500$ m；粗粒土：$R = 700 \sim 1000$ m。R 也可用经验公式估算：

$$R = 3000 \cdot s\sqrt{k} \tag{12.26}$$

式中 $s = H - h_0$，为原地下水位与井中水位之差，即抽水稳定时井中水位的降落值；k 为土壤的渗流系数。计算时，k 以 m/s 计，R，s，H 均以 m 计。

例 12.3 有一水平不透水层上的普通完整井，井的半径 $r_0 = 0.2$ m，含水层厚度 $H = 8.0$ m，渗流系数 $k = 0.0006$ m/s。抽水一段时间后，井中水深 $h_0 = 4.0$ m。试计算井的渗流量及浸润线。

解： 井中水面降落值 $s = H - h_0 = 8.0\ \text{m} - 4.0\ \text{m} = 4.0\ \text{m}$。井的影响半径

$$R = 3000s\sqrt{k} = 3000 \times 4\ \text{m} \times \sqrt{0.0006} = 293.9\ \text{m}$$

则井的渗流量

$$Q = 1.36\frac{k(H^2 - h_0^2)}{\lg\dfrac{R}{r_0}}$$

$$= 1.36\frac{0.0006\ \text{m/s}[(8.0\ \text{m})^2 - (4.0\ \text{m})^2]}{\lg\left(\dfrac{293.9\ \text{m}}{0.2\ \text{m}}\right)} = 0.0124\ \text{m}^3/\text{s}$$

井的浸润线方程为

$$z^2 - h_0^2 = \frac{0.732}{k}Q\lg\frac{r}{r_0}$$

设一系列 r 值，代入上式，算出对应的 z 值，计算结果列于表 12.4 中。根据表中的 r 和 z 值，即可绘出井的浸润线。

表 12.4

r (m)	r/r_0	$\lg r/r_0$	$0.732\frac{Q}{k}\lg\frac{r}{r_0}$ (m^2)	z^2 (m^2)	z (m)
1	5	0.699	10.52	26.52	5.150
3	15	1.176	17.70	33.70	5.800
5	25	1.398	21.04	37.04	6.086
20	100	2.000	31.00	47.00	6.856
40	200	2.301	34.63	50.63	7.115
80	400	2.602	39.16	55.16	7.427
120	600	2.778	41.81	57.81	7.603
160	800	2.903	43.69	59.69	7.725
200	1000	3.00	45.15	61.15	7.820
250	1250	3.097	46.61	62.61	7.913

二、承压完整井

设一承压完整井如图 12.14 所示，含水层位于两个不透水层

之间。这里仅考虑最简单的情况，即两个不透水层层面均为水平，$i=0$，以及含水层厚度 t 为定值。因为是承压井，当井穿过上面一层不透水层时，则承压水会从井中上升，达到高度 H。H 为地下水的总水头，其水面可以高于地面，也可以低于地面，但 H 大于含水层厚度 t 才是承压井。当从井中连续抽水达到恒定状态时，井中水深将由 H 降至 h_0，井外的测管水头线也将下降，形成稳定的漏斗形曲面，如图 12.14 虚线所示。此时和普通完整井一样，可按一元渐变渗流处理。根据裘皮幼公式，过水断面上的平均流速为

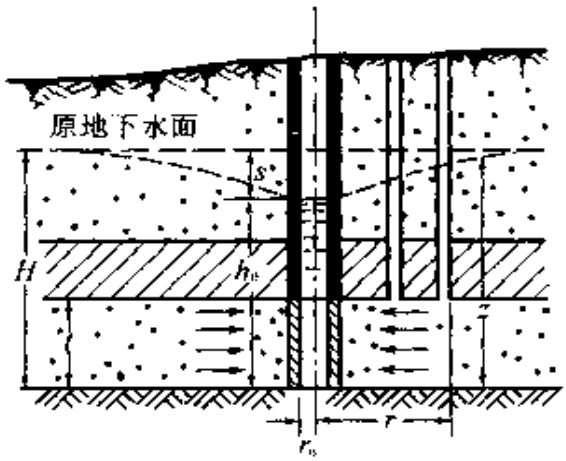


图 12.14

$$v = kJ = k\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}r}$$

距井中心为 r 处的过水断面面积 $A=2\pi rt$，则渗流量为

$$Q = vA = 2\pi rtk\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}r}$$

上式分离变量后积分得

$$z = \frac{Q}{2\pi kt}\ln r + C$$

式中 C 为积分常数，由边界条件确定。当 $r=r_0$ 时，$z=h_0$，得积分常数 $C=h_0-\frac{Q}{2\pi kt}\ln r_0$。代入上式得

$$z - h_0 = \frac{Q}{2\pi kt}\ln\frac{r}{r_0} = 0.366\frac{Q}{kt}\lg\frac{r}{r_0} \qquad (12.27)$$

上式为承压完整井的测压管水头线方程。

井的影响半径为 R。当 $r=R$ 时，$z=H$，代入式(12.27)得承压完整井的渗流量公式为

$$Q = 2.73\frac{kt(H - h_0)}{\lg\frac{R}{r_0}} = 2.73\frac{kts}{\lg\frac{R}{r_0}} \tag{12.28}$$

式中井的影响半径 R 仍可用式(12.26)估算。

三、井群

抽取地下水时，常采用几口井同时抽水，这些井统称为井群，各井间的相互位置往往根据具体情况而定，各井的出水量也不一定相等。当各井间的距离小于影响半径时，各井之间的地下水位会相互影响，致使渗流区的浸润面形状变得异常复杂。

设由 n 个普通完整井组成的井群如图 12.15 所示。

按各井单独抽水时的浸润线方程式(12.24)有

$$z_1^2 - h_{01}^2 = \frac{Q_1}{\pi k}\ln\frac{r_1}{r_{01}}$$

$$z_2^2 - h_{02}^2 = \frac{Q_2}{\pi k}\ln\frac{r_2}{r_{02}}$$

……

$$z_n^2 - h_{0n}^2 = \frac{Q_n}{\pi k}\ln\frac{r_n}{r_{0n}}$$

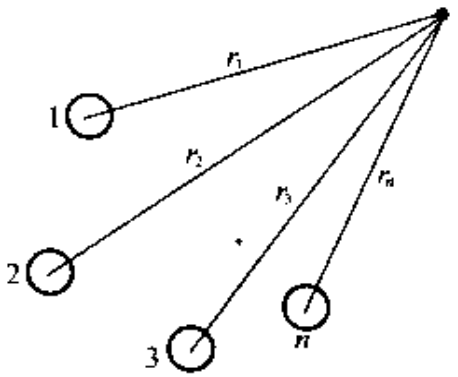


图 12.15

当各井同时抽水时，按照势流叠加原理可导出其公共浸润线方程为

$$z^2 = \frac{Q_1}{\pi k}\ln\frac{r_1}{r_{01}} + \frac{Q_2}{\pi k}\ln\frac{r_2}{r_{02}} + \cdots + \frac{Q_n}{\pi k}\ln\frac{r_n}{r_{0n}} + C$$

式中 $r_1, r_2 \cdots r_n$ 为给定点 A 到各井的距离，C 为常数。

考虑简单的情况，$Q_1 = Q_2 = \cdots = Q_n = \frac{Q_0}{n}$，上式变为

$$z^2 = \frac{Q_0}{\pi k}\left[\frac{1}{n}\ln(r_1 r_2 \cdots r_n) - \frac{1}{n}\ln(r_{01} r_{02} \cdots r_{0n})\right] + C \tag{12.29}$$

式中 $Q_0 = Q_1 + Q_2 + \cdots + Q_n$ 为井群总抽水流量。

设井群的影响半径为 R，若 R 远大于井群的尺寸，确定边界条件 C，而 A 离各单井都较远，则可认为

$$r_1 \approx r_2 \approx \cdots \approx r_n \approx R, z = H$$

代入式(12.29)，则有

$$C = H^2 - \frac{Q_0}{\pi k}\left[\ln R - \frac{1}{n}\ln(r_{01} r_{02} \cdots r_{0n})\right]$$

将 C 回代入式(12.29)，并改为常用对数，则

$$z^2 = H^2 - \frac{0.732 Q_0}{k}\left[\lg R - \frac{1}{n}\lg(r_1 r_2 \cdots r_n)\right] \qquad (12.30)$$

上式为普通完全井井群的浸润线方程。式中井群的影响半径 R 可采用单井的 R 值。计算时，k 以 m/s 计；H、r、R 均以 m 计。当 $n, r_1, r_2, \cdots, r_n$ 以及 R, k 为已知时，若测得 H 和 Q_0 值，则 A 点的水位 z 可直接由式(12.30)求得；若测得 H 和 z 值，也可由该式得到井群的总抽水流量 Q_0。

例 12.4 由半径 $r_0 = 0.1$ m 的 8 个普通完全井组成的井群，布置在长 60 m，宽为 40 m 的长方形周线上，用以降低基坑的地下水位，如图 12.16 所示，地下含水层厚度 $H = 10$ m，土壤的渗流系数 $k = 0.0001$m/s，井群的影响半径 $R = 500$ m，总抽水量 $Q_0 = 0.02$ m^3/s。试求地下水位在井群中心 A 处的降落值。

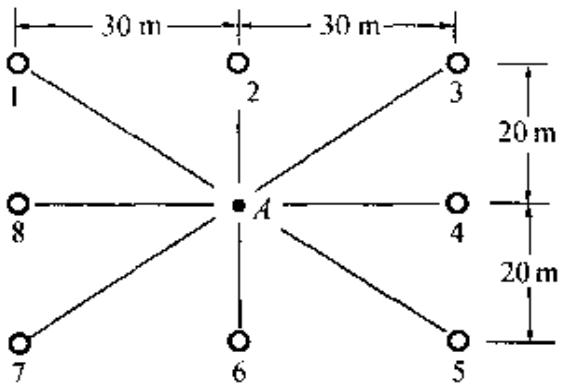


图 12.16

解： 各井距中心点 A 的距离为 $r_2 = r_6 = 20$ m，$r_4 = r_8 = 30$ m，$r_1 = r_3 = r_5 = r_7 = \sqrt{(30\text{ m})^2 + (20\text{ m})^2} = 36$ m。根据式(13.30) 有

$$z^2 = H^2 - \frac{0.732 Q_0}{k}\left[\lg R - \frac{1}{n}\lg(r_1 r_2 \cdots r_n)\right]$$

将有关数据代入上式，得

$$z^2 = (10\ \mathrm{m})^2 - \frac{0.732 \times 0.02\ \mathrm{m^3/s}}{0.0001\ \mathrm{m/s}}\left[\lg 500 - \frac{1}{8}\lg(36^4 \times 20^2 \times 30^2)\right]$$

$$= 82.09\ \mathrm{m^2}$$

$$z = 9.06\ \mathrm{m}$$

$$s = H - z = 10\ \mathrm{m} - 9.06\ \mathrm{m} = 0.94\ \mathrm{m}$$

第六节　土坝渗流

土坝是水利工程中应用很广的一种水工建筑物。土坝挡水后，由于土的渗透作用，水仍然会忽多忽少地从土坝的上游面渗入坝体，然后从坝下游流出。坝体的渗流不仅使水库的水量有所损失，也关系到土坝的安全。根据国内外土坝失事的统计，其中45%是由于渗流问题引起的。土坝水力计算的主要任务是确定坝体浸润线的位置、渗流流速和渗流量。当土坝坝轴线较长，沿坝轴线各断面形状相同时，除坝体两端外，常将土坝渗流作为平面问题处理。

土坝可以建在不透水地基上，也可建在透水地基上；其坝体可以由均质土壤构成，也可以由非均质土壤构成，例如，用透水性能较小的粘土在坝身内设置心墙，或在上游面铺设斜墙，以减少渗流量。作为土坝渗流的基础，本节仅阐述水平不透水地基上的均质土坝渗流。

图 12.17 所示为一水平不透水地基上均质土坝的截面图。坝顶宽为 b，坝高为 H_n，上游坝面的边坡系数为 m_1，下游坝面的边坡系数为 m_2。当上游水深 H_1 和下游水深 H_2 都不变时，渗流为恒定流。土坝上游面 AB 是渗流的起始断面，水从 AB 面渗入，在坝身内形成具有浸润线 AC 的无压渗流。由于在流动过程中有能量损失，浸润线 AC 总是沿程下降的。浸润线是渗流区的上边界流线，由于流线必须与过水断面垂直，浸润线在 A 点处必垂直于 AB。浸润线与下游坝面的交点 C 称为逸出点，C 点高于下游水

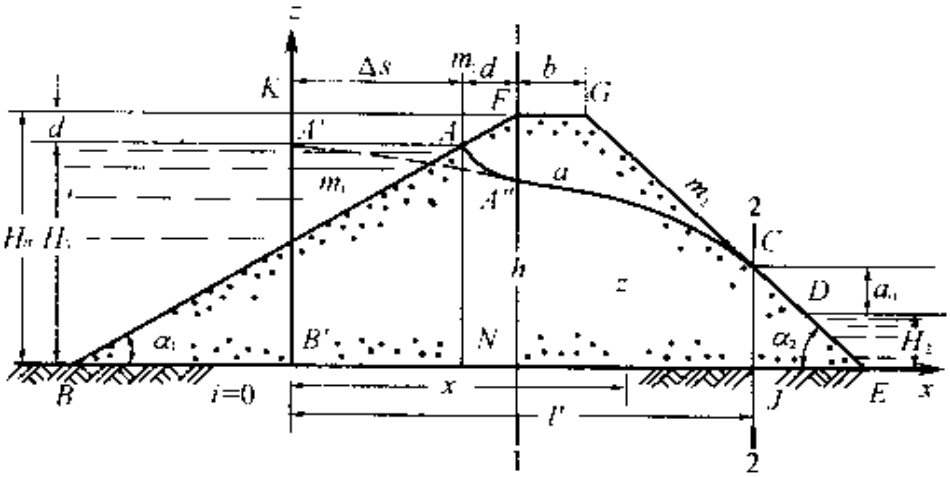


图 12.17

面。下游水面与下游坝面的交点为 D。CD 为逸出段，CD 的高度 a_0 称为逸出高度。在下游，一部分水流沿下游坝面的 CD 段逸出，另一部分水流经 DE 段流入下游。

可以用反证法证明土坝一定存在逸出段 CD。设想，如果浸润线与下游坝面的交点是 D，则根据流线（浸润线）必须垂直于过水断面（图中 DE）的原则，会形成如图 12.18 所示的先下降后上升的浸润线 MD，但是能量只能沿程下降，也就是说，浸润线只能沿程下降。因此，如果浸润线为 MD 是不符合能量规律的，图 12.18 所示情况不可能发生。

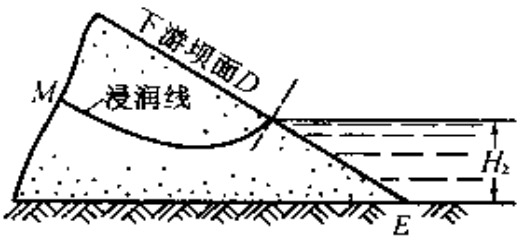


图 12.18

图 12.19 是土坝渗流的流线图。图中浸润线 AC 沿程下降，而在 DE 段，流线与 DE 垂直。需要说明的是，逸出段 CD 既不是渗流的过水断面，也不是渗流的流线。

土坝渗流通常采用分段法进行计算。该法由巴甫洛夫斯基（Н.Н.Павловский）首先提出，后经其他作者加以补充和修正。

按渗流流线形状的不同，先将坝体分段，如图 12.17 所示，通过上游坝顶 F 点取铅直断面 1，通过逸出点 C 取铅直断面 2，将坝

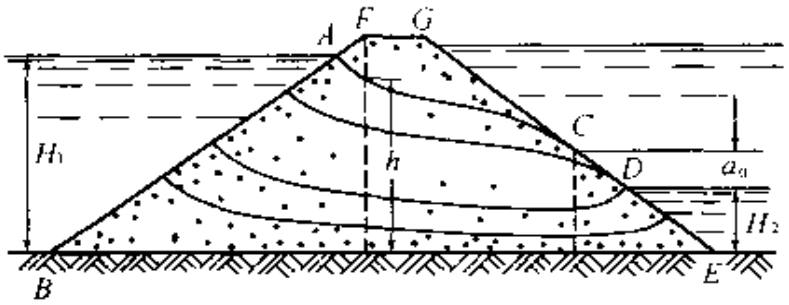


图 12.19

体渗流区分为三段。分析这三段的渗流情况，可以建立三个方程，依据恒定流三段流量相等的条件，可求解单宽渗流量 q、断面 1 的渗流水深 h 和断面 2 的 $a_0 + H_2$，共三个未知数，从而可以确定浸润线的位置。以上是求解土坝渗流三段法的基本思想，但三段法的计算过程较繁，下面只介绍经过简化后较为简便的两段法。

如图 12.17 所示，两段法是用图中等效的矩形坝体 $AA'B'N$ 代替原上游段三角形坝体 ABN 参与计算。等效的涵义是通过两者的单宽流量 q 相等，且断面 1 处的渗流深度 h 不变。设该矩形坝体的宽度为 Δs，根据实验资料，Δs 可用以下经验公式计算

$$\Delta s = \lambda H_1 \tag{12.31}$$

式中系数 λ 与上游边坡系数 m_1 有关。λ 值可由下式确定

$$\lambda = \frac{m_1}{1 + 2m_1} \tag{12.32}$$

简化后的坝体渗流区被分为以断面 2 为界的前后两段。现将前后两段的计算方法分述如下。

1. 前段

若不透水层的底坡 $i = 0$，前段可视为平底渐变渗流，其上、下游两个断面的渗流水深分别为 H_1 及 $a_0 + H_2$，由式(12.19)得单宽流量 q 的关系式为

$$\frac{q}{k} = \frac{H_1^2 - (a_0 + H_2)^2}{2l'} \tag{12.33}$$

由图 12.17 可知，式中 $l' = \lambda H_1 + m_1 d + b + m_2(H_n - a_0 - H_2)$。其

中 $H_n = H_1 + d$，而 d 为坝顶超高。

2. 后段

后段为图 12.17 中断面 2 右侧的三角形坝体 CJE 部分。其上游面为 CJ，下游面为 CE。该段的流线比较弯曲。

在计算中，以下游水面为界，把 CE 分为 CD 和 DE 两段，相应的渗流区被分为水面以上的①区和水面以下的②区，如图 12.20 所示。计算时近似以水平直线代替流线的长度，按渐变渗流的裘皮幼公式分别建立①区的流量 q_1 和②区的流量 q_2 的表达式，则单宽流量 $q = q_1 + q_2$。

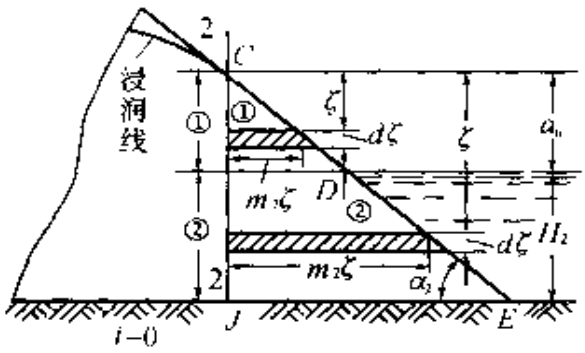


图 12.20

在①区中，任一水平流线的水头损失等于 C 点至该流线末端之间的铅直距离 ζ，而流线的长度为 $m_2\zeta$，则①区内任一元流的单宽流量

$$dq_1 = u d\zeta = kJ d\zeta = k \frac{\zeta}{m_2 \zeta} d\zeta = \frac{k}{m_2} d\zeta$$

①区的单宽流量

$$q_1 = \int_0^{a_0} dq_1 = \int_0^{a_0} \frac{k}{m_2} d\zeta = \frac{k a_0}{m_2}$$

在②区中，上端 CJ 的单位势能为 $a_0 + H_2$，下端 DE 的单位势能为 H_2，任一水平流线的水头损失均为 a_0，而各流线的长度为 $m_2\zeta$，则②区内任一元流的单宽流量

$$dq_2 = u d\zeta = kJ d\zeta = k \frac{a_0}{m_2 \zeta} d\zeta$$

②区的单宽流量

$$q_2 = \int_{a_0}^{a_0 + H_2} k \frac{a_0}{m_2 \zeta} d\zeta = \frac{k a_0}{m_2} \ln \frac{a_0 + H_2}{a_0}$$

总的单宽流量为

$$q = q_1 + q_2 = \frac{ka_0}{m_2}\left(1 + \ln\frac{a_0 + H_2}{a_0}\right)$$

$$= \frac{ka_0}{m_2}\left(1 + 2.3\lg\frac{a_0 + H_2}{a_0}\right)$$

或

$$\frac{q}{k} = \frac{a_0}{m_2}\left(1 + 2.3\lg\frac{a_0 + H_2}{a_0}\right) \tag{12.34}$$

以上由前、后两段建立的式(12.33)和式(12.34)只有两个未知数 q 和 a_0，方程数和未知数相等，可以求解。

在式(12.33)和式(12.34)中，未知数 a_0 是隐函数，因此，要用试算法求 q 和 a_0。即假设一系列的 a_0，由式(12.33)求出一系列对应的 $\frac{q}{k} = f_1(a_0)$，由式(12.34)求出一系列 $\frac{q}{k} = f_2(a_0)$，当 $f_1(a_0) = f_2(a_0)$ 时的 a_0 和 q 即为所求。试算可用计算机或用图解法求解(见例 12.5)。

求出 q 和 a_0 以后，土坝的浸润线可借助图 12.17 按以下步骤求得。

按比例绘制图 12.17 的有关尺寸。若不透水层为平坡，图 12.17 中 x 和 z 的关系可按平坡无压渐变浸润线方程式(12.19)写为

$$x = \frac{k}{2q}(H_1^2 - z^2) \tag{12.35}$$

设一系列的 z 值，用上式可算得一系列对应的 x 值，点绘浸润线 $A'C$。土坝实际的浸润线是 AC。一般认为 $A'C$ 和 AC 在断面 1 处的水深 h 相同。如图 12.17 所示，当 $x = \Delta s + m_1 d$ 时，$z = h$，得 A'' 点。再根据流线与过水断面垂直的性质，浸润线在 A 点与过水断面 AB 垂直，然后用手描法连接 AA'' 为一条光滑曲线，最后得实际浸润线 $AA''C$。

例 12.5 有一水平不透水层上的均质土坝，坝高 $H_n = 17.0$ m，上游水深 $H_1 = 15.0$ m，下游水深 $H_2 = 0$，上、下游边坡系数分别为 $m_1 = 3$，$m_2 = 2$，坝顶

宽度 $b=12.0$ m，渗流系数 $k=3\times10^{-4}$ cm/s。求土坝单宽渗流量 q、逸出高度 a_0，并绘制浸润线。

解： 由式(12.31)和(12.32)有

$$\Delta s=\lambda H_1=\frac{m_1}{1+2m_1}H_1=\frac{3}{1+2\times3}\times15.0\text{ m}=6.43\text{ m}$$

$$\begin{aligned}l'&=\lambda H_1+m_1d+b+m_2(H_n-a_0-H_2)\\&=6.43\text{ m}+3(17.0\text{ m}-15.0\text{ m})+12.0\text{ m}+2(17.0\text{ m}-a_0-0)\\&=58.43\text{ m}-2a_0\end{aligned}$$

代入式(12.33)得

$$\frac{q}{k}=\frac{H_1^2-(a_0+H_2)^2}{2l'}=\frac{(15.0\text{ m})^2-(a_0+0)^2}{2(58.43\text{m}-2a_0)}$$

$$=\frac{225\text{ m}^2-a_0^2}{2(58.43\text{ m}-2a_0)}=f_1(a_0)$$

由式(12.34)有

$$\frac{q}{k}=\frac{a_0}{m_2}\left(1+2.3\lg\frac{a_0+H_2}{a_0}\right)=\frac{a_0}{2}\left(1+2.3\lg\frac{a_0+0}{a_0}\right)$$

$$=\frac{a_0}{2}=f_2(a_0)$$

假定一系列 a_0 值，分别求得一系列对应的 $f_1(a_0)$ 及 $f_2(a_0)$ 值，列于表12.5。

表 12.5

a_0 (m)	$225-a_0^2$ (m^2)	$2(58.43-2a_0)$ (m)	$f_1(a_0)$ (m)	$f_2(a_0)=\frac{a_0}{2}$ (m)
2.00	221.00	108.96	2.028	1.00
4.00	209.00	100.86	2.036	2.00
6.00	189.00	92.86	2.035	3.00
10.00	125.00	76.86	1.628	5.00

按表 12.5 的数据绘出 $a_0\sim f_1(a_0)$ 和 $a_0\sim f_2(a_0)$ 曲线，如图12.21 所示。由图查得两曲线交点的纵坐标 $a_0\approx4.0$ m。

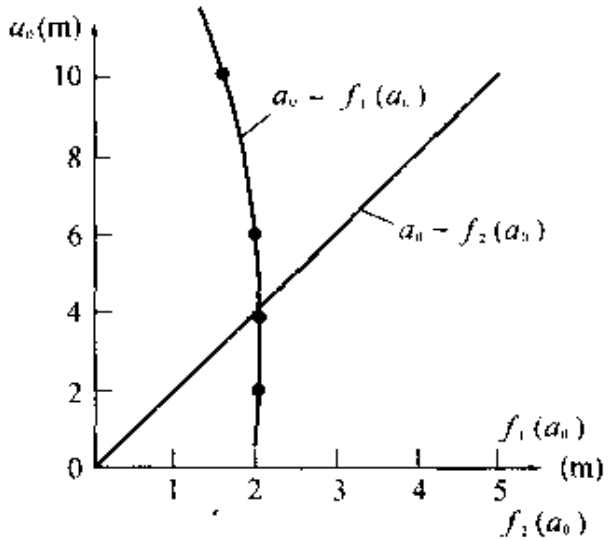


图 12.21

$\frac{q}{k} = \frac{a_0}{2} = \frac{4.0\ \text{m}}{2} = 2.0\ \text{m}$,则单宽渗流量为

$$q = 0.0003\ \text{cm} \times 200\ \text{cm/s} = 0.06\ \text{cm}^2/\text{s} = 0.518\ \text{m}^2/\text{day}$$

应用式(12.35)计算土坝浸润线坐标:

$$x = \frac{k}{2q}(H_1^2 - z^2)$$

将 $H_1 = 15.0\ \text{m}$, $\frac{q}{k} = 2.0\ \text{m}$ 代入得

$$x = \frac{1}{2 \times 2.0\ \text{m}}(15.0\ \text{m}^2 - z^2) = \frac{1}{4.0\ \text{m}}(225\ \text{m}^2 - z^2)$$

在 $H_1 = 15.0\ \text{m}$ 与 $H_2 + a_0 = 4.0\ \text{m}$ 之间假定一系列 z 值,求得一系列相应的 x 值,列于表 12.6。将表中 x, z 值点绘于图 12.22,并连成曲线,即为土坝浸润线。

表 12.6

z(m)	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4
z^2(m^2)	196	169	144	121	100	81	64	49	36	25	16
x(m)	7.25	14.0	20.2	26.0	31.2	36.0	40.3	44.0	47.3	50.0	52.3

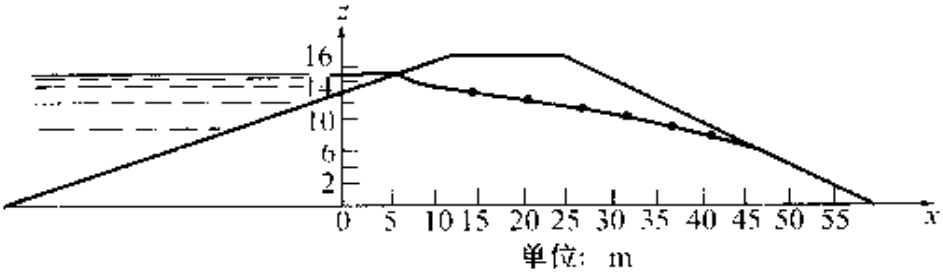


图 12.22

第七节　渗流的基本微分方程，渗流的流速势函数

实际工程中的某些渗流，可视为渐变渗流，如本章前面所述无压渐变渗流、井的渗流和土坝渗流等，其特点是同一过水断面上各点流速相等，虽然不同断面的流速不等，但流速仅仅是断面位置坐标的函数，称为一元渗流。对于一元渗流问题，可应用达西定律或裘皮幼公式求解。但工程中有些渗流属于急变渗流，这种渗流的运动要素往往是两个或三个坐标的函数，称为二元或三元渗流。为此，需建立适用于三元运动的基本微分方程——连续方程和运动方程。然后再结合渗流的边界条件求解。

一、渗流的连续方程

根据渗流模型的假设，可按第五章相同的方法推导出不可压缩液体渗流的连续方程为

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \tag{12.36}$$

式(12.36)对于恒定渗流和非恒定渗流都是适用的。

二、渗流的运动方程

先讨论渗流阻力的表达式。液体在孔隙介质中流动时，必然要受到孔隙周界的阻力，按照渗流模型的假设，模型中的阻力必须等于真实渗流的阻力，颗粒对渗流的阻力是需要加以考虑的，并认

为阻力是分布在整个渗流区域内。设渗流模型中单位质量流体所受的阻力为 f，它在坐标轴 x, y, z 方向上的分力分别为 f_x, f_y 及 f_z，方向与流向相反。当单位质量流体沿流动方向移动距离 $\mathrm{d}s$ 时，阻力所作的功为 $-f\mathrm{d}s$，对于单位重量液体而言，阻力所作的功为 $-f\mathrm{d}s/g$。设 H 代表某点的总水头(即测管水头)，则单位重量液体在距离 $\mathrm{d}s$ 上的能量变化 $\mathrm{d}H$(负值)等于阻力所作的功，故有

$$-\frac{f\mathrm{d}s}{g} = \mathrm{d}H$$

则

$$f = -g\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}s} = gJ$$

上式为单位质量液体渗流阻力的表达式。如渗流在层流范围内，由式(12.14)有 $\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}s} = -\frac{u}{k}$，则

$$\boldsymbol{f} = \frac{g}{k}\boldsymbol{u} \tag{12.37}$$

其投影式为

$$\left.\begin{aligned} f_x &= \frac{g}{k}u_x \\ f_y &= \frac{g}{k}u_y \\ f_z &= \frac{g}{k}u_z \end{aligned}\right\} \tag{12.38}$$

下面推导渗流的运动方程。在恒定渗流中任取一点 O，其坐标为 x, y, z，以 O 点为中心取微小正六面体为控制体，其边长分别为 $\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z$。如图 12.23 所示。设 O 点的渗流速度及压强分别为 u_x, u_y, u_z，及 p。

作用在微小六面体上的力有质量力、阻力和压力。设单位质量液体所受的质量力与渗流阻力在 x, y, z 坐标轴上的分力分别为 X, Y, Z 和 f_x, f_y, f_z。关于压力，以 x 方向为例，与 x 轴垂直的两侧微小面积中心点的压强分别为 $p - \frac{\partial p}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{2}$ 及 $p + \frac{\partial p}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{2}$。此外，

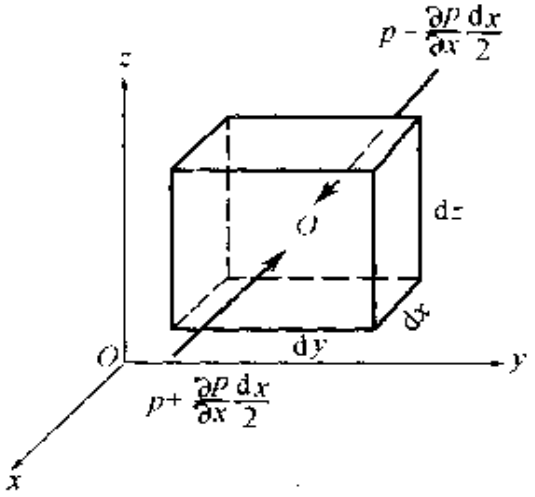


图 12.23

由于渗流的流速很小,由加速度引起的惯性力可以忽略。于是,沿 x 方向的平衡方程为

$$X\rho dxdydz + (p - \frac{\partial p}{\partial x}\frac{dx}{2})dydz -$$

$$(p + \frac{\partial p}{\partial x}\frac{dx}{2})dydz - f_x\rho dxdydz = 0$$

上式除以 $\rho dxdydz$,可得

$$X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} - f_x = 0$$

同理可得 y 方向和 z 方向的方程为

$$Y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} - f_y = 0$$

$$Z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - f_z = 0$$

将式(12.38)代入以上各式得

$$\left.\begin{aligned} X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{g}{k}u_x &= 0 \\ Y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{g}{k}u_y &= 0 \\ Z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{g}{k}u_z &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (12.39)$$

当质量力只有重力时，$X = Y = 0, Z = -g$。而渗流总水头 $H = z + \frac{p}{\rho g}$，即

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho g \frac{\partial H}{\partial x}, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \rho g \frac{\partial H}{\partial y}, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \rho g\left(\frac{\partial H}{\partial z} - 1\right)$$

则式(12.39)可写为

$$\left.\begin{aligned} u_x &= -k\frac{\partial H}{\partial x} \\ u_y &= -k\frac{\partial H}{\partial y} \\ u_z &= -k\frac{\partial H}{\partial z} \end{aligned}\right\} \tag{12.40}$$

上式为恒定渗流的运动方程。该式可视为达西定律在三元运动中的推广。

对于均质各向同性土壤，各点的渗流系数 k 是常数，式(12.40)又可写为

$$\left.\begin{aligned} u_x &= \frac{\partial(-kH)}{\partial x} \\ u_y &= \frac{\partial(-kH)}{\partial y} \\ u_z &= \frac{\partial(-kH)}{\partial z} \end{aligned}\right\} \tag{12.41}$$

渗流的连续方程和渗流的运动方程构成渗流的基本微分方程组，共有四个微分方程，理论上可以求解 u_x, u_y, u_z 和 H(或 p)四个未知函数。

三、渗流的流速势函数

将式(12.41)代入第五章液体质点旋转角速度 ω 的表达式(5.10)，可得

$$\omega_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z}\right) = -\frac{k}{2}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 H}{\partial y \partial z}\right) = 0$$

$$\omega_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x}\right) = -\frac{k}{2}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 H}{\partial z \partial x}\right) = 0$$

$$\omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}\right) = -\frac{k}{2}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y}\right) = 0$$

可见符合达西定律的各向同性土壤的渗流是无旋运动，因而必存在流速势函数 φ。由第五章式(5.32)流速势函数 φ 与流速分量 u_x, u_y, u_z 的关系为

$$u_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad u_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad u_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \tag{12.42}$$

上式与式(12.41)对比，得渗流的流速势函数

$$\varphi = -kH \tag{12.43}$$

将式(12.42)代入连续方程式(12.36)，可得

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \tag{12.44}$$

或

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} = 0 \tag{12.45}$$

对于平面渗流，则有

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \tag{12.46}$$

或

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = 0 \tag{12.47}$$

以上表明，渗流的流速势函数 φ 或水头 H 满足拉普拉斯方程。因此渗流问题也可以结合边界条件通过解拉普拉斯方程求得 φ(或 H)值，并由此求解流场中的 $\boldsymbol{u}$ 和 p。

四、边界条件

现以上一节图 12.19 所示的土坝渗流来说明渗流的边界条件。

1. 透水边界

透水边界是指水流渗入渗出的边界，如图 12.19 中 AB 与 DE。

透水边界上各点的水头相等，是一条等水头线（等势线），水头函数是已知的，如以不透水层面为基准面，则

在边界 AB 上

$$H = H_1 = 常数$$

或

$$\varphi = -kH_1 = 常数$$

在边界 DE 上

$$H = H_2 = 常数$$

或

$$\varphi = -kH_2 = 常数$$

2. 不透水边界

不透水边界系地基的不透水层或不透水建筑物的轮廓，如图 12.19 中的边界线 BE 就是不透水边界。由于渗流沿着边界流动，所以沿边界法线方向的渗流速度 u_n 为零，即

$$u_n = \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \quad 或 \quad \frac{\partial H}{\partial n} = 0$$

3. 浸润面（线）

浸润面是渗流的自由液面，如图 12.19 中的 AC，浸润面上的压强 $p = 0$。此外，浸润面是自由液面上由流线组成的面，由于垂直于浸润面的速度分量为零，则浸润面的另一边界条件为 $u_n = \frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{\partial H}{\partial n} = 0$。

4. 逸出段

浸润线出口位置高于下游水位，形成逸出段，如图 12.19 中的边界 CD。逸出段边界上各点的压强 $p = 0$。根据在土坝渗流一节中的分析，逸出段既不是等水头线或等势线，也不是流线。

五、渗流问题解法概述

求解渗流问题的方法可分为以下四种类型：

1. 解析法

此法是结合具体边界条件，用数学方法求解渗流的微分方程

组，可得到渗流的流速场和压强场。对于复杂的空间渗流，严格的解析解是非常困难的。对于某些简化的平面问题，解析法常采用复变函数理论中的保角映射法。

2. 数值解法

实际渗流的边界条件一般都比较复杂，用解析法求解往往是很困难的，所以常采用数值解法，即求其数值近似解。其中常用的为有限差分法和有限单元法。由于数值解法计算工作量大，故一般用电子计算机求解。目前，在生产实际中，已有许多成功的数值解的实例。

3. 图解法

对于恒定平面渗流，可绘制流网求解。利用流网可求得渗流速度、渗流量及渗流压强。具体解法将在下一节介绍。

4. 实验法

根据相似原理，按一定比例将渗流区域缩制成模型。对模型加以观测，然后推算到实际流场。实验法可以分为两类：一类是仍用土壤、岩石等为介质，在其中发生的仍为渗流，如渗流槽等；另一类是用比拟模型来比拟渗流，其介质已不是孔隙介质，如电比拟、热比拟等。

第八节　恒定平面渗流的流网解法

上一节已经阐明，渗流运动，不论是渐变渗流还是急变渗流，都是势流运动。理论上都可以应用势流理论求解。然而，对于渐变渗流，如不透水地基上的无压渐变渗流、井和土坝的渗流等比较简单，前面几节已经应用一元分析法进行了研究。本节将讨论渗流的流网解法。

一、流网的绘制

在第五章中已经提及流网的绘制方法。对渗流而言常用的绘制流网的方法是手描法和水电比拟法。

(一)手描法

以图 12.24 所示的坝下渗流为例。

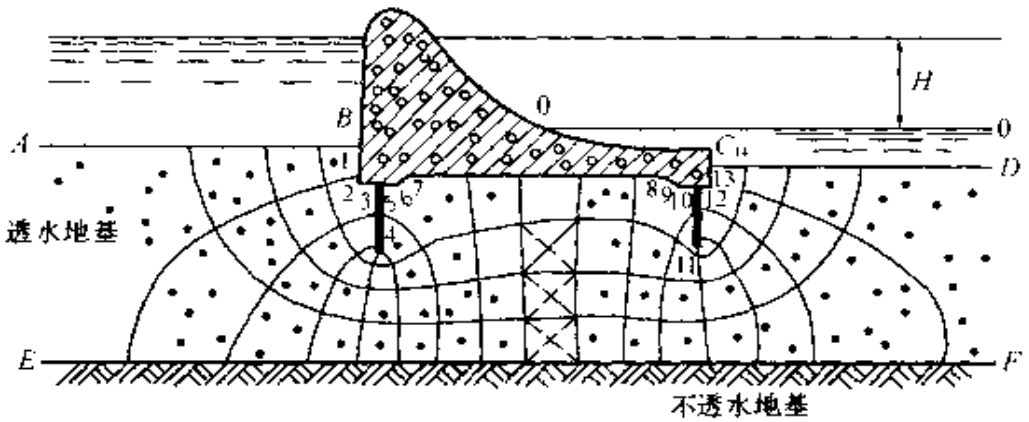


图 12.24

建筑在透水地基上的水工建筑物,如混凝土坝或闸,其建筑物本身由不透水的材料构筑。当上、下游具有水头差 H 时,可以认为没有渗流流过建筑物本身,然而在透水地基上就形成了有压急变渗流。图 12.24 是在坝基的上、下游具有编号为 3-4 和 10-11 板桩的挡水坝。在水工结构中,板桩的作用是增加渗径(渗流的路径)以减少板桩以后的渗流压强和渗流流速。

手描法绘制流网的步骤是:

1. 按比例绘制建筑物底部轮廓及土层厚度。根据渗流的边界,确定边界流线和边界等势线。图 10.24 中的上游透水边界 AB 是一条等势线,若以下游水面为基准面 0 - 0,其水头为 H,流速势函数 $\varphi = -kH$;下游透水边界 CD 也是一条等势线,其水头为零,流速势函数 φ 也为零。水从上游边界 AB 渗入透水地基后,紧贴着建筑物基底下的水沿着建筑物轮廓线 1,2,3,…,14 流动,这条线是一条边界流线;另一条边界流线是不透水层面 EF。

2. 根据流网特性,绘制流网。流网是由等势线簇和流线簇交织成的正交网格。在第五章中已经阐明,如果把流网绘成曲边正方形网格,则 $\Delta\varphi = \Delta\psi$,而 $\Delta q = \Delta\psi$,则在求解势流问题时会带来很大的方便。为此,按边界等势线和边界流线的形状以及网格为

曲边正方形的要求内插数条流线和等势线。流线和等势线在网格内部和边界处都应互相保持垂直。

3. 检验。加绘网格的对角线加以检验。如图 12.24 中虚线所示，曲边正方形网格的对角线也应该正交平分。

4. 初绘的流网，不一定符合要求，重复步骤 2、3 进行修正，直至符合要求为止。

需要说明的是，在边界形状突变的局部地方，个别网格往往不能保证为曲边正方形，不可避免地要出现三角形或五角形网格，但实践证明，个别网格不符合要求，对整体的计算成果影响甚微。

如果透水层很厚，另一边界离坝底甚远，则流线的形状离基底越远越接近于一个半圆弧，如图 12.25 所示，其圆心 o 可取为基底线的中点，半径 R 取为基底水平长度的 2 ~ 2.5 倍或建筑物地下轮廓最大垂直尺寸(如板桩)的 5 倍。

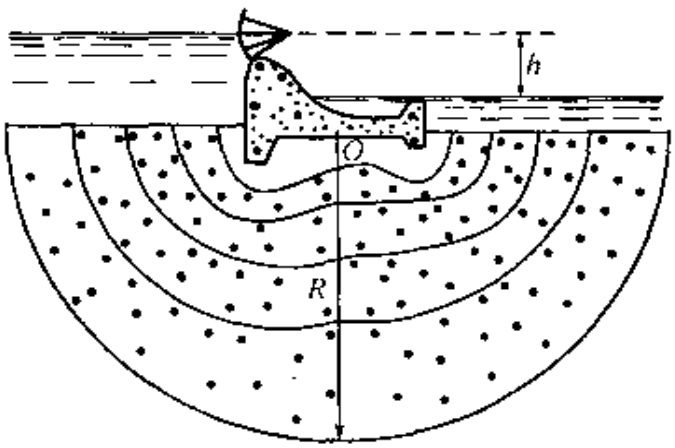


图 12.25

无压渗流也可以绘制流网，但因浸润线(边界流线)的位置也是待求的，所以绘制无压渗流的流网比上述有压渗流的流网要复杂。以图 12.26 所示透水地基上具有水平排水的均质土坝为例。在浸润线上各点的压强 $p = 0$，所以浸润线上各点的水头 H 就等于该点到基准面 0 - 0 的距离。

手描的浸润线必须满足以下条件：

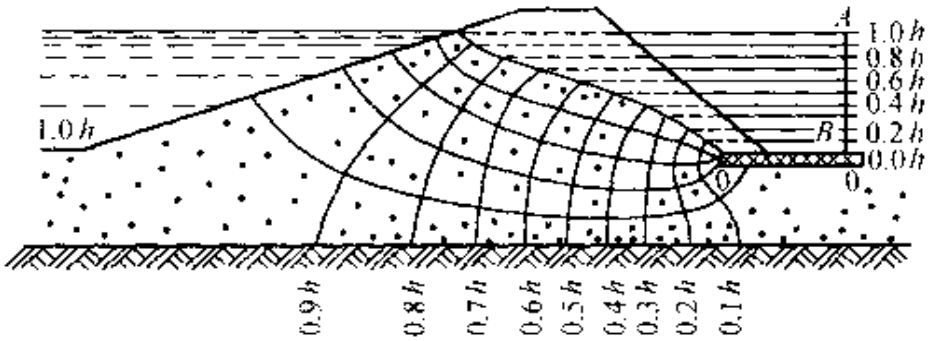


图 12.26

1. 所有的等势线(即等水头线)必须与浸润线(流线)相垂直,如图 12.26 所示。

2. 设上下游水头差为 h,若绘制的流网有 $n+1$ 条等势线,则相邻两条等势线的水头差为 $\frac{h}{n}$,在图 12.26 中取辅助线 AB,将 h 分为 n 等分(图中 $n=10$),过每一等分点作水平线,这些水平线与浸润线的交点应该与相应的等势线与浸润线的交点重合。如果不符合以上条件则需重新调整浸润线,重新绘制流网,直至符合为止。

(二)水电比拟法

渗流场中各物理量与电流场中各物理量有着相似的对应关系,因而可以用电场来比拟渗流场。如果用导电材料和绝缘材料将渗流区域按一定比例缩制成电流区域模型,并保持电场与渗流场的几何相似和边界条件相似,通过测定电场中的等电位线可以得到渗流中的等势线(或流线),然后加绘流线(或等势线),从而得到流网的方法,称为水电比拟法。

在物理学中,电流密度 σ 在空间三个坐标方向上的分量为

$$\sigma_x = -\lambda \frac{\partial V}{\partial x}, \quad \sigma_y = -\lambda \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \sigma_z = -\lambda \frac{\partial V}{\partial z} \tag{12.48}$$

式中 V 为电位,λ 为电导系数。按照电荷守恒定律,电流的连续方程为

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 \tag{12.49}$$

将式(12.48)代入式(12.49)得

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \tag{12.50}$$

上式表明,电场中的电位 V 与渗流场中的 H 一样,都满足拉普拉斯方程。因此,电场中的物理量与渗流场中的物理量存在着相似关系。它们的比拟关系列于表 12.7。

图 12.27(a)为闸下恒定有压渗流的流区图。图 12.27(b)为相应的电模拟装置。在电拟模型中,相应渗流区的透水边界用良导体(如铜等)制成,不透水边界用绝缘体(如有机玻璃或胶木板)制成,渗流区充以导电的液体,如水或盐水。

表 12.7

渗　　流　　场	电　　场
水头 H	电位 V
水头 H 的拉普拉斯方程 $\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} = 0$	电位 V 的拉普拉斯方程 $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$
渗流流速 u	电流密度 σ
渗流系数 k	电导系数 λ
流线长度 s	导线长度 s
渗流过水断面面积 A	导线横断面面积 A
达西定律 $u = -k\frac{dH}{ds}$	欧姆定律 $\sigma = -\lambda\frac{dV}{ds}$
渗流流量 $Q = -kA\frac{dH}{ds}$	电流强度 $I = -\lambda A\frac{dV}{ds}$
在不透水边界上 $\frac{\partial H}{\partial n} = 0$	在绝缘边界上 $\frac{\partial V}{\partial n} = 0$
等势线(或等水头线)	等电位线

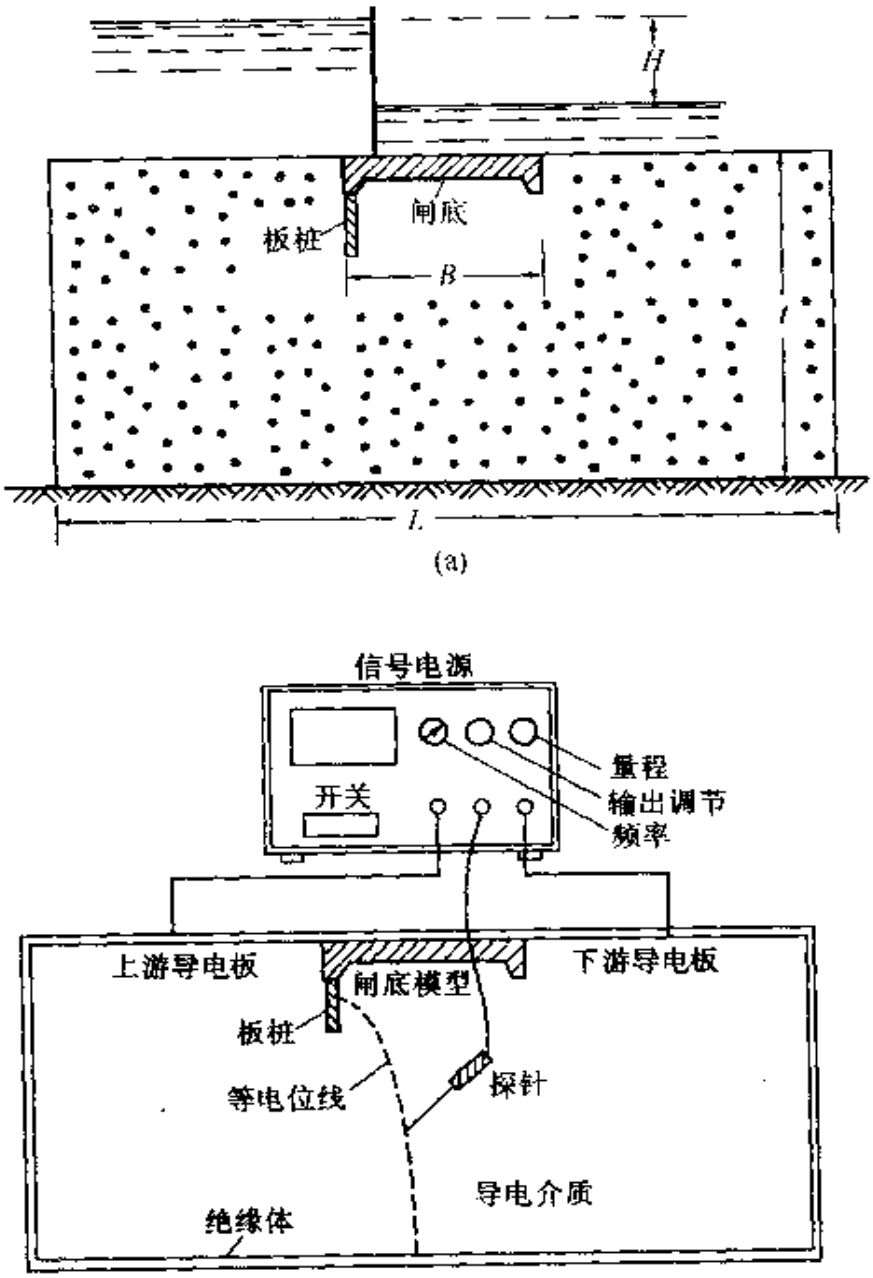


图 12.27

试验中的量测电路如图 12.27(b)所示，将信号电源产生的电压加于上、下游导电板，调节成固定的电位差，并在导电区内形成电场。用探针依次量测不同电位时的各条等电位线，即代表渗流区中相应水头的等势线，再根据流网特性补绘流线，就可得到流

网。

由于流函数 ψ 和势函数 φ 都满足拉普拉斯方程，因此也可用电拟法先测定流线，其方法是透水边界用绝缘材料制成，不透水边界用良导体制成，在这种情况下测得的等电位线代表流线，再补绘等势线，同样可以得到流网。

在制作模型时，当透水层厚度 t 不大时，如图 12.27(a)所示，其横向宽度 L 可取为

$$L = B + (3 \sim 4)t \tag{12.51}$$

上式中 B 为建筑物地下轮廓线在水平方向的长度。

电拟法也可用于解决非均质土壤中的渗流问题。例如在解决不同渗流系数 k 的层状土壤渗流问题时，可将模型中相应的导电板用隔板隔开，但此隔板应能使电流通过，并使不同导电液的电导系数的比例等于原型中层状土壤渗流系数的比例。

二、应用流网进行渗流计算

流网绘成后，可以用它来计算渗流的流速、单宽流量和渗流压强等问题。如图 12.28 所示，若流网共有 $n+1$ 条等势线(包括上、下游边界等势线在内，图中 $n+1=17, n=16$)和 $m+1$ 条流线(包括上、下两条边界流线在内，图中 $m+1=6, m=5$)，当上下游水位差为 h 时，相邻两条等势线之间的水位差为 $\Delta h = -\Delta H = \frac{h}{n}$，其中 $\Delta H = H_{i+1} - H_i$ 为负值，$\Delta h = H_i - H_{i+1}$ 为正值。当流网为曲边正方形时，相邻两条等势线之间的势函数之差 $\Delta\varphi$ 以及相邻两条流线之间的流函数之差 $\Delta\psi$ 为

$$\Delta\varphi = \Delta\psi = -k\Delta H = k\Delta h = k\frac{h}{n}$$

(一)水力坡度 J 和渗流流速 u 的计算

计算渗流区中某一网格的平均水力坡度 J 和平均渗流流速 u，应从流网中量测该网格的平均流线长度 Δs，则

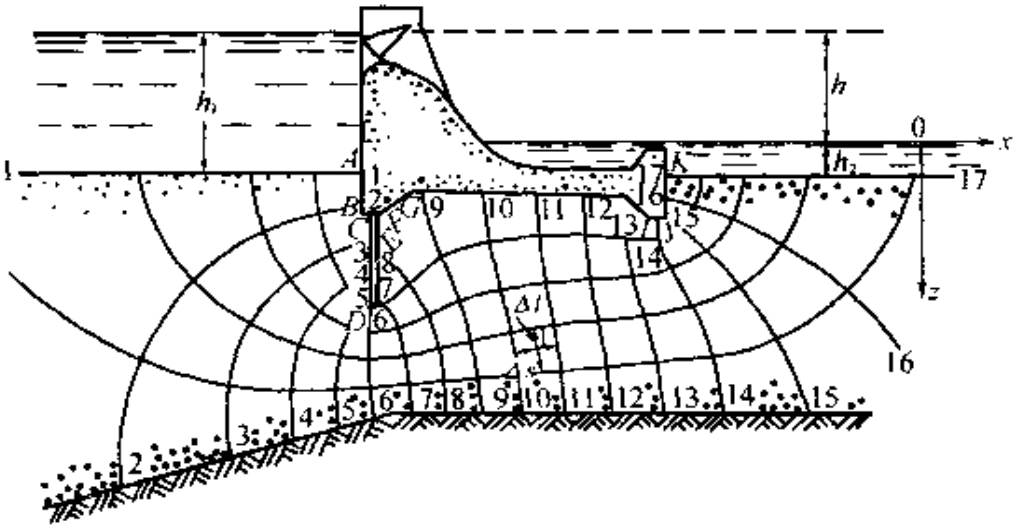


图 12.28

水力坡度 $$J = -\frac{\Delta H}{\Delta s} = \frac{h}{n\Delta s}$$

渗流流速 $$u = kJ = -k\frac{\Delta H}{\Delta s} = \frac{k}{n}\frac{h}{\Delta s} \tag{12.52}$$

(二)单宽渗流量的计算

根据流函数的性质，$\mathrm{d}q = \mathrm{d}\psi$，取有限差为 $\Delta q = \Delta\psi$，当流网为曲边正方形时，$\Delta q = \Delta\psi = \Delta\varphi$，则每条流带(两流线间的区域)的单宽渗流量为

$$\Delta q = -k\Delta H = \frac{1}{n}kh \tag{12.53}$$

$m+1$ 条流线将渗流区分为 m 条流带，则整个渗流区的单宽流量 q 为各流带单宽流量 Δq 的总和，即

$$q = m\Delta q = \frac{m}{n}kh \tag{12.54}$$

(三)渗流压力的计算

先确定渗流区中任意点压强的计算公式。取下游水面为基准面，且 z 轴铅直向下，如图 12.28 所示，任意点的压强

$$p = \rho g(H + z) \tag{12.55}$$

分别绘制坝(或闸)底各点的 H 分布图和 z 分布图,可得压强 p 的分布。

以图 12.28 为例说明 H 分布图和 z 分布图的绘制方法。将图 12.28 所示的坝底轮廓线 $ABC\cdots K$ 展开为一条水平线绘于图 12.29 上,各等势线与坝底轮廓线的交点 1,2,3,…,17 也注于该展开的轮廓线上。以轮廓线为基准线,在它的上面绘制 H 分布图,在它的下面绘制 z 分布图。

绘制 H 分布图时,在轮廓线以上绘制辅助铅垂线 h,其长度等于上、下游水位差 h,并把它分为 n 等分,过每一等分点作水平线,与此同时,通过坝底轮廓线上的 1,2,3,…,17 点分别作铅垂线,依次与各水平线分别交于 1′,2′,3′,…,17′ 点。由于 1′,2′,3′,…,17′ 点到坝底轮廓线(基准线)的铅直距离分别是点 1,2,3,…17 点的水头 H,故在图 12.29 中,折线 1′,2′,3′,…,17′ 以下,坝底轮廓线以上所构成的图形就是 H 分布图。

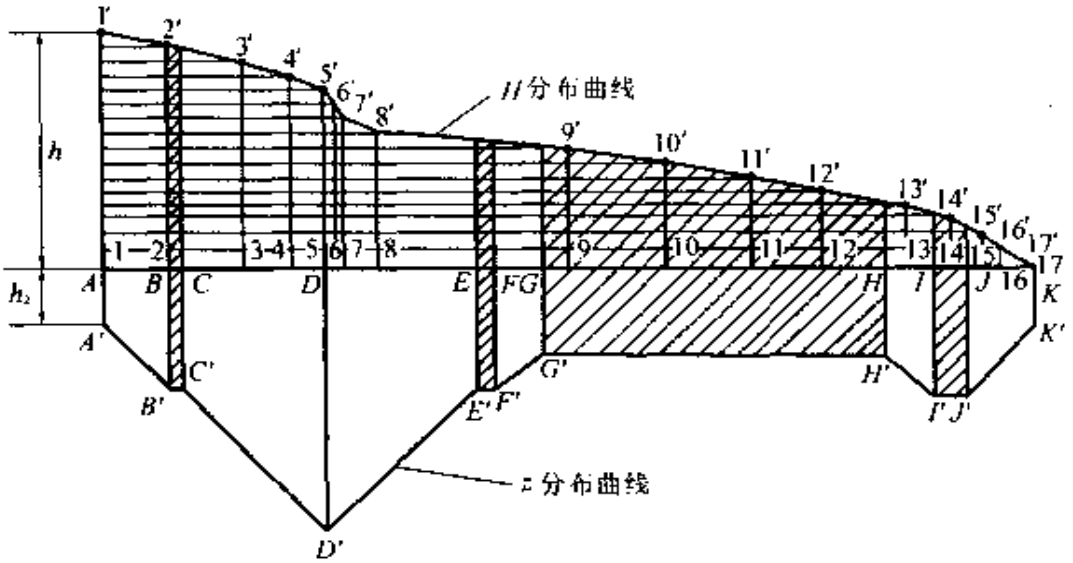


图 12.29

z 分布图的绘制方法是:量取图 12.28 中坝底轮廓线各转折点 $A,B,C,\cdots,K$ 点的 z 值。请注意,z 轴铅直向下,坐标原点在下

游水面上。按与 H 分布图相同的比例在轮廓线以下绘制 z 分布图，如图 12.29 中坝底轮廓线以下，折线 A'，B'，C'，…，K' 以上所构成的图形就是 z 分布图。

按式(12.55)，坝基上任意点的 p 值为 ρg 乘以从 H 分布线至 z 分布线之间的铅直距离。压强的方向垂直作用于相应点的坝底轮廓线。如图 12.28，作用在 BC、EF、GH、IJ 上的渗流压强是铅直向上的，其相应的 H 分布图和 z 分布图为图中画有斜线的部分；作用于坝底铅直段 AB、CD、DE、JK 上的渗流压强是水平方向的，其中 AB、CD 上的压强方向自左向右，DE、JK 上的压强方向右向左；同理，作用于坝底倾斜段 FG、HI 上的渗流压强也垂直指向作用面，因而是倾斜的。

作用于坝底上的单宽渗流压力等于相应的 H 分布图和 z 分布图的面积之和，即 $P = \int_s p\mathrm{d}s$。s 为相应的坝底轮廓线的长度。但是方向不同的压强不能放在一起计算，例如铅直压力和水平压力要分别计算。

在工程中主要关心作用于建筑物底部铅直向上的渗流压力，因为它关系到建筑物的稳定性。当只要求计算作用于坝底的铅直渗流压力时，不必将坝底轮廓线展开，可直接在坝底上绘制 H 分布图和 z 分布图。如图 12.30 所示，H 分布图的面积以 Ω_1 表示，它是图中 1′，2′，3′，…，17′ 与下游水面之间的面积；z 分布图的面积以 Ω_2 表示，是下游水面与坝底轮廓线 A，B，C，…，K 之间的面积。则作用于单位宽度(垂直于纸面)坝底上的铅直压力为

$$P = \rho g(\Omega_1 + \Omega_2) \tag{12.56}$$

例 12.6 某挡水坝筑于透水地基上，其坝基流网图如图 12.28 所示，上游水深 $h_1 = 12.0$ m，下游水深 $h_2 = 2.0$ m，渗流系数 $k = 5 \times 10^{-5}$ cm/s。试求：(1)图中点 1 处的渗流流速以及坝基的单宽渗流量 q；(2)坝轴(垂直于纸面)总长 $L = 150$ m 的坝基总渗流量 Q。

解：(1)上、下游水头差 $h = h_1 - h_2 = 12.0\ \mathrm{m} - 2.0\ \mathrm{m} = 10.0\ \mathrm{m}$。由图，等势线总数 $n + 1 = 17$，$n = 16$，流线总数 $m = 5$，量得 $\Delta s_1 = 1.9$ m，则

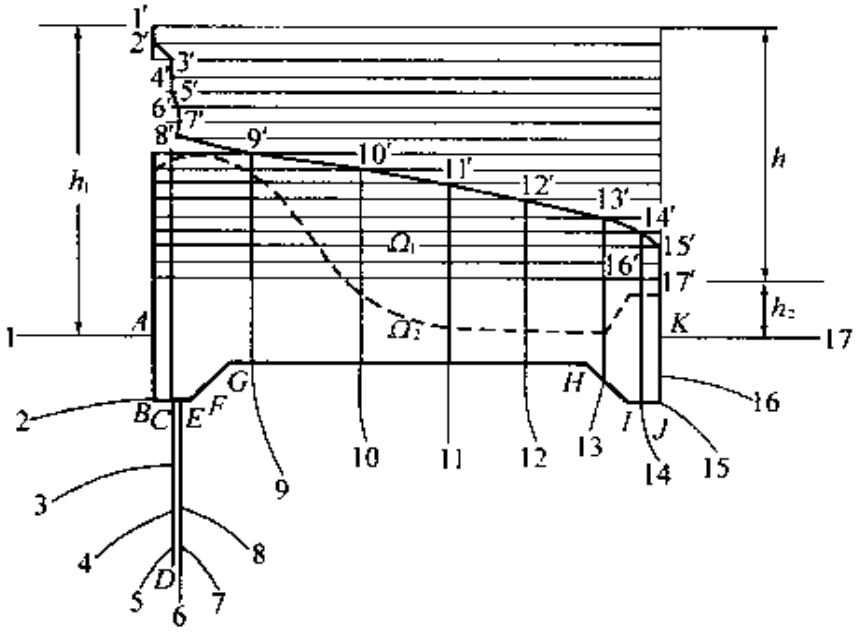


图 12.30

$$u_1 = \frac{kh}{n\Delta s_1} = 5 \times 10^{-7}\ \text{m/s}\ \frac{10.0\ \text{m}}{16 \times 1.9\ \text{m}} = 1.65 \times 10^{-7}\ \text{m/s}$$

$$q = \frac{m}{n}kh = \frac{5}{16} \times 5 \times 10^{-7}\ \text{m/s} \times 10.0\ \text{m} = 1.56 \times 10^{-6}\ \text{m}^2/\text{s}$$

$$(2)\ Q = gL = 1.56 \times 10^{-6}\ \text{m}^2/\text{s} \times 150\ \text{m} = 2.34 \times 10^{-4}\ \text{m}^3/\text{s}$$

习　题

12.1　为测定某土样的渗流系数 k 值，进行达西实验，圆筒直径 $d = 0.2$ m，长为 $l = 0.40$ m 内的测压管水面高差为 0.12 m，实测流量为 $Q = 1.63\text{cm}^3/\text{s}$，计算 k 值。

12.2　试比较地下明渠渐变渗流与明渠渐变流的异同点。

12.3　已知不透水层坡度 $i = 2.5 \times 10^{-3}$，土壤渗流系数 $k = 4.3 \times 10^{-4}$ cm/s，均匀渗流水深 $h_0 = 12$ m，求单宽渗流量 q。

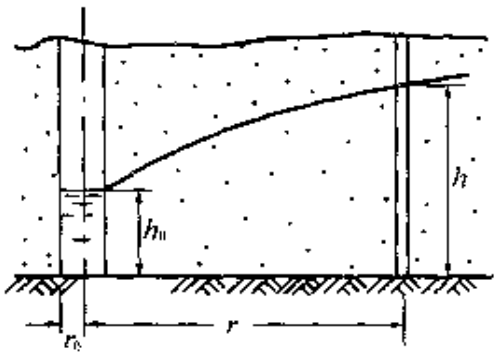
12.4　一不透水层底坡 $i = 0.0025$，土壤渗流系数 $k = 5 \times 10^{-3}$ cm/s，在相距 550 m 的两个钻孔中水深分别为 $h_1 = 3.0$ m 及 $h_2 = 4.0$ m，求单宽渗流量并绘制浸润线。

12.5　水平不透水层上建一均质土坝，上、下游坝坡为 $m_1 = 3.0$，$m_2 = 2.5$，上、下游水深为 $H_1 = 15.6$ m，$H_2 = 1.1$ m，坝顶超高 $d = 1.4$ m，坝顶宽 $b =$

10.0 m，坝体渗流系数 $k = 5 \times 10^{-6}$ cm/s。计算土坝渗流量并绘制浸润线。

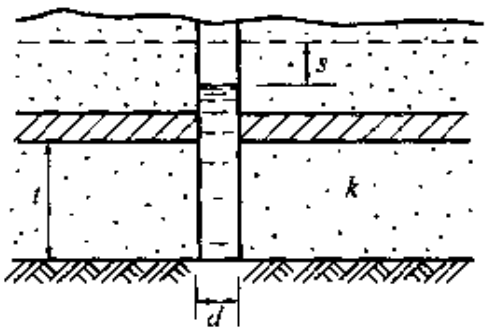
12.6　在水平不透水层以上的土层中凿一到底的普通井，直径为 $d = 0.30$ m，地下水深 $H = 14.0$ m，土壤渗流系数 $k = 0.001$ m/s。今用抽水机抽水，井水位下降 4.0 m 后达到稳定，影响半径 $R = 250$ m。求抽水机出水流量 Q。

12.7　为实测某区域内土壤的渗流系数 k 值，今打一到底的普通井进行抽水试验，如图所示，在井的附近（影响半径范围内）设一钻孔，距井中心为 $r = 80$ m，井半径为 $r_0 = 0.20$ m。测得抽水稳定后的流量为 $Q = 2.5 \times 10^{-3}$ m³/s，井中水深 $h_0 = 2.0$ m，钻孔水深 $h = 2.8$ m。求土壤的渗流系数 k。



题 12.7 图

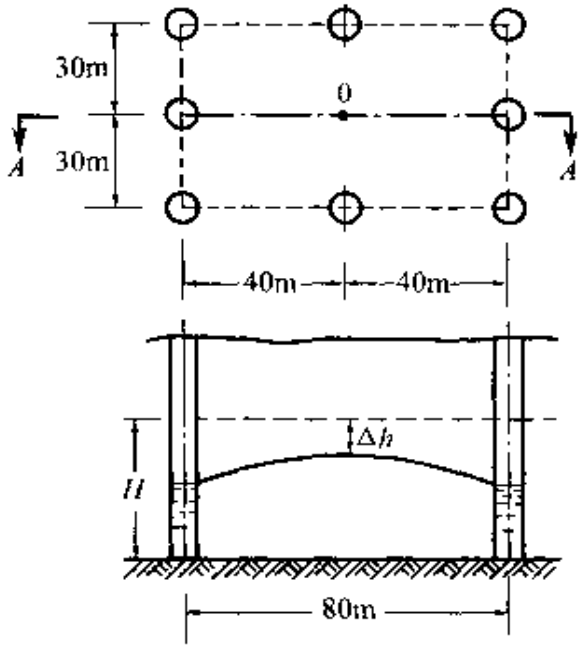
12.8　在厚为 $t = 9.8$ m 的粗砂有压含水层中打一直径为 $d = 152$ cm 的井。渗流系数 $k = 4.2$ m/d，影响半径 $R = 150$ m。今从井中抽水，如图所示，井水位下降 $s = 4.0$ m，求抽水流量 Q。



题 12.8 图

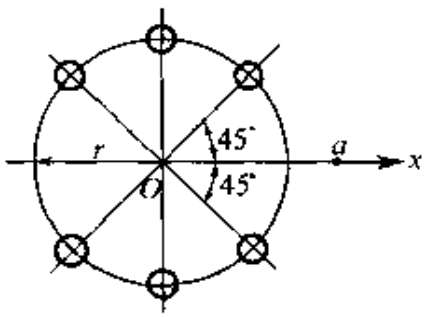
12.9　为降低基坑地下水位，在基坑周围，沿矩形边界排列布设 8 个普通完全井如图所示。井的半径为 $r_0 = 0.15$ m，地下水含水层厚度 $H = 15$ m，渗流系数为 $k = 0.001$ m/s，各井抽水流量相等，总流量为 $Q_0 = 0.02$ m³/s，设

井群的影响半径为 $R=500$ m，求井群中心点 O 处地下水位降落值 Δh。



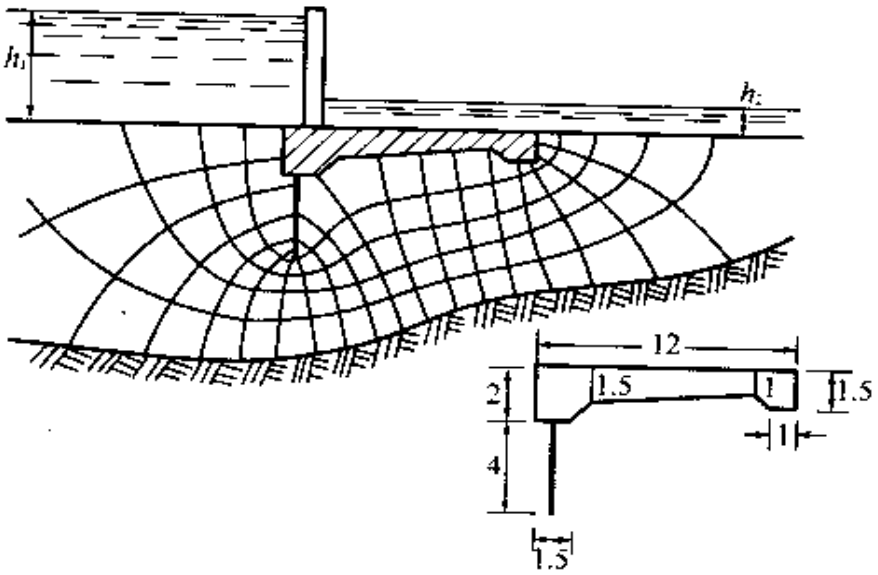
题 12.9 图

12.10 井群由六个普通完全井构成，分布于半径 $r=25$ m 的圆周上，如图所示。每个井抽水量为 $Q=15$ l/s，影响半径 $R=700$ m，含水层厚度 $H=10$ m，渗流系数 $k=0.001$ m/s，求井群中心 O 点及位于 x 轴上距 o 点为 40 m 的 a 点的地下水位。



题 12.10 图

12.11 有一水闸闸基的流网如图所示，闸底板各部分尺寸见右下角附图（单位为 m）。上、下游水深分别为 $h_1=12.0$ m，$h_2=2.0$ m，渗流系数 $k=2.5\times10^{-3}$ cm/s。试求闸底板所受的渗流压力。



题 12.11 图

第十三章　有压管道非恒定流

第一节　概　　述

第三章曾经讲过，运动要素（如流速、压强等）随时间变化的液流称为非恒定流。本章将介绍有压管道中的非恒定流问题。

有压管道中有各种非恒定流问题。例如，当有压管道末端阀门突然启闭，使管中流速和动量突然变化，导致管中液体压强迅速交替升降，这种水力现象称为水击或水锤。水击是常见的一种管道非恒定流。当水电站负荷变化或发生事故而迅速调节或关闭引水管末端阀门（或导叶）时，在引水管中将发生水击。发生水击时，管中压强升降值往往很大，会引起管道破裂或发生空穴等。又如，在电站引水管上常修建调压室，以减小水击作用的强度和范围。调压室中的水流运动也是一种管道非恒定流。此外，船闸输水和水库泄水时，由于水头随时间变化而引起管中流速和流量的变化，也属於管道非恒定流问题。本章主要讲述水击和调压系统的非恒定流问题。

当管中发生水击时，由于压强的迅速而巨大的变化，将导致液体的压缩（或膨胀）和管壁的变形，因此在研究水击问题时，必须考虑液体的压缩性和管壁的弹性。对于调压系统非恒定流，由于压强变化缓慢，则不必考虑液体的压缩性和管壁的弹性。

第二节　水击现象及水击分类

一、水击波的传播

图 13.1 所示为一从水库引水的简单管道，管道末端设有调节

阀门。当管中水流为恒定流时，管道水头为 H_0，压强为 p_0，平均流速为 v_0。因管中的流速水头和水头损失与发生水击时的压强水头相比小得多，故可忽略。当阀门突然瞬时完全关闭（即阀门关闭时间为零），管中即发生水击。水击的发生、发展和消失过程可描述如下。

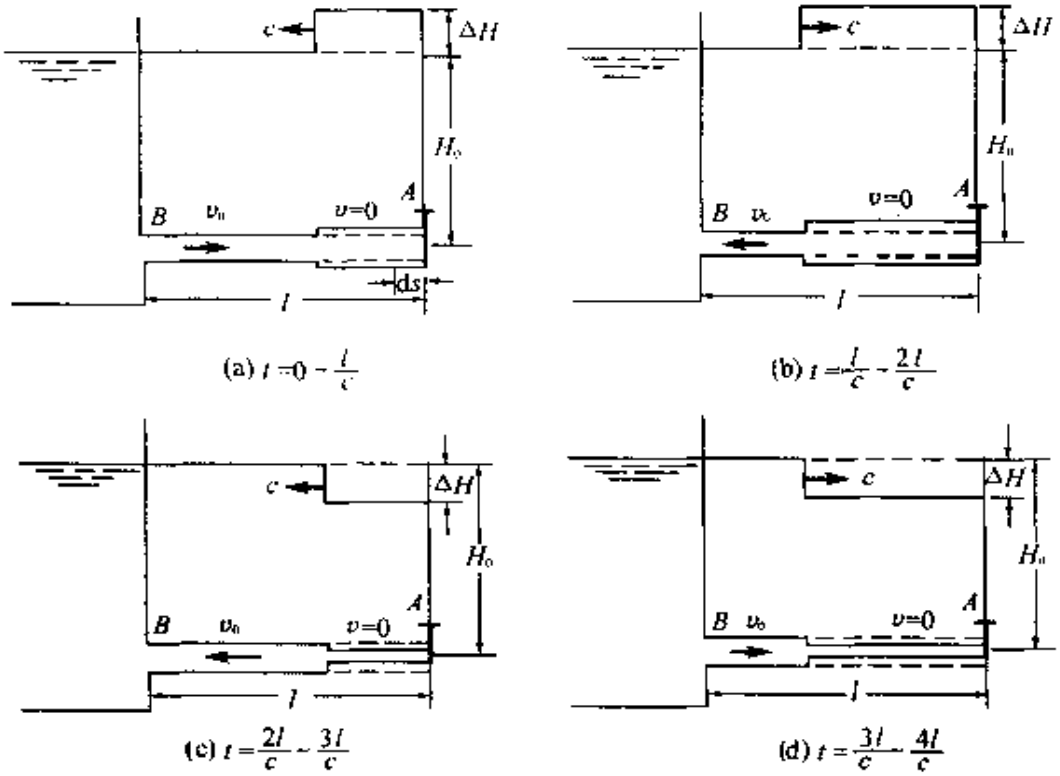


图 13.1

当阀门 A 瞬时关闭，管中紧靠阀门长度为 ds 的微小水体即停止流动，其流速由 v_0 减小至零，随着该水体动量的突然改变，使其压强迅速增大 Δp（即水头增大 ΔH），Δp 称为水击压强。在 Δp 的作用下，微小水体体积被压缩，密度增大，水体周围管壁膨胀。随后，紧靠此水层上游的另一微小水层因受阻而停止流动，亦产生水击压强 Δp，同时水体压缩、密度增大、管壁膨胀。这种压强增大、水体压缩和管壁膨胀的现象将从阀门 A 处沿管道迅速向上游传播，称为水击波传播现象，见图 13.1(a)。由于该水击波使管中

液体压强增大，且传播方向与恒定流时的流动方向相反，故称为增压逆波。设管长为 l，水击波传播速度（简称水击波速）为 c，则水击波从 A 端传至管道进口 B 端所需的时间 $t=\frac{l}{c}$。此时，全管水体停止流动，水击压强均为 Δp，并处于水体压缩和管壁膨胀状态。从 $t=0$ 至 $t=\frac{l}{c}$ 的时段为水击波传播的第一阶段。

由于水库水位及管道进口处压强保持不变，当水击波传到 B 点时，在断面 B 两侧形成压强差。在压差作用下，使管中处于静止状态的水体以反向流速 v_0 向水库方向流动，同时 B 点下游附近的流段从水体被压缩及管壁膨胀的状态首先恢复原状，水击压强 Δp 亦减小至零。随后，这种水体反向流动和水体、管壁、压强复原的现象以波速 c 从 B 端逐层向 A 端传播，见图 13.1(b)。由于这种压强减小的水击波是沿原来流动方向传播的，故称为减压顺波。它是第一阶段增压逆波的反射波。当 $t=\frac{2l}{c}$ 时，减压顺波恰好传至 A 端，此时全管水体反向流动，且水体、管壁均恢复原状，全管水击压强 Δp 均等于零。从 $t=\frac{l}{c}$ 至 $t=\frac{2l}{c}$ 的时段为水击波传播的第二阶段。

水击波从阀门 A 传至管道进口 B，再从 B 传到 A 所需的时间称为水击的相或相长，用 T_r 表示，即 $T_r=\frac{2l}{c}$。从 $t=0$ 至 $t=\frac{2l}{c}$ 的一相称为水击的第一相或首相。

在首相末，由于惯性作用，紧邻阀门处的水层继续以流速 v_0 向上游流动，有脱离阀门的趋势。但因阀门完全关闭，无水体补充，为保持水流的连续性，流动被迫停止，流速又从 v_0 减小到零，同时水体膨胀，密度减小，压强减小 Δp（即水击压强为 $-\Delta p$，水击压强水头为 $-\Delta H$），管壁呈收缩状态。上述现象又从 A 端迅速向 B 端传播，即阀门处产生一个减压逆波，并以波速 c 向上游传播，见图 13.1(c)。它是第二阶段减压顺波的反射波。至 $t=\frac{3l}{c}$ 时刻，

减压逆波传至 B 端，全管水体处于静止和膨胀状态，同时管壁收缩，水击压强均为 $-\Delta p$。从 $t=\frac{2l}{c}$ 至 $t=\frac{3l}{c}$ 的时段为水击波传播的第三阶段。

当减压逆波传至 B 端，由于水库一侧压强大于管中压强，在压差作用下，水库中的水体又以流速 v_0 向管中流动，使膨胀的水体和收缩的管壁恢复原状，水击压强亦从 $-\Delta p$ 恢复到零。这种现象又以增压顺波的形式按波速 c 从 B 端向 A 端传播，见图 13.1(d)。它是第三阶段减压逆波的反射波。至 $t=\frac{4l}{c}$ 时刻，增压顺波传至 A 端，此时全管水体、管壁、流速和压强均恢复到水击发生前的状态。从 $t=\frac{3l}{c}$ 到 $t=\frac{4l}{c}$ 的时段为水击波传播的第四阶段。

从 $t=0$ 至 $t=\frac{4l}{c}$ 的时段称为水击周期，以 T 表示，即 $T=\frac{4l}{c}$。因水击相长 $T_r=\frac{2l}{c}$，故 $T=2T_r$。

当水击第一周期结束后，如阀门仍然关闭，则水击波将重复上述四个阶段不断地在管中来回传播。但因水流阻力的存在，水击压强将因摩擦损失而迅速衰减，水击波在较短时段内便自行消失。

二、水击压强过程图

根据上述水击压强的传播过程，可以绘出管道各个断面的水击压强 Δp 随时间 t 变化的过程图。图 13.2(a)、(b)、(c)分别表示阀门瞬时关闭时管道阀门断面 A、进口断面 B 和距阀门为 s 的断面的压强 p 随时间 t 的变化过程图。由图可知，断面 A 的压强升高和降低最早，且持续时间最长；断面 B 的压强升高和降低只发生在水击波传至该断面的瞬间；而断面 s 的压强升降的迟早和持续时间的长短则取决于距离 s 的大小。可见阀门处是受水击压强影响最大和最严重的断面。

图 13.2 所示为不计阻力时的水击压强过程图。实际上在水

流阻力作用下，水击压强将随时间迅速衰减，以至消失。图 13.3 所示实线为计及阻力时阀门断面 A 的水击压强过程图，图中虚线为不计阻力时的水击压强过程图。由图可见，尽管断面 A 的水击压强随时间迅速衰减，但最大水击压强却与不计阻力时相差不大。

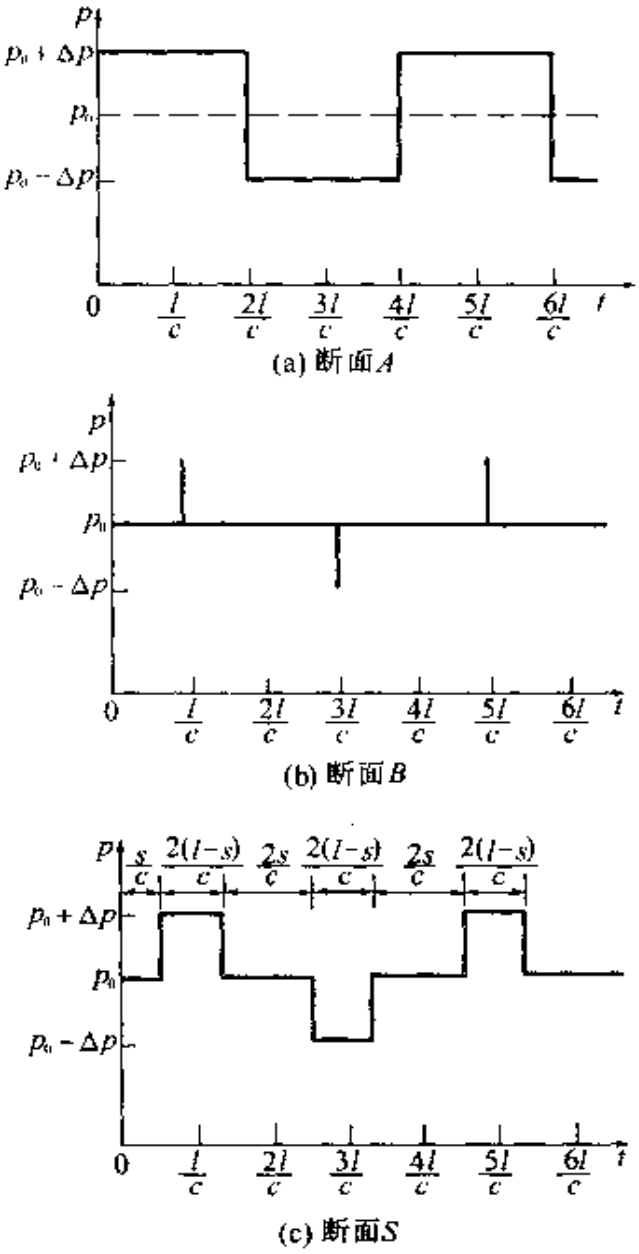


图 13.2

三、水击分类

以上讨论的是阀门瞬时关闭时水击波传播和水击压强的变化情况。实际上阀门不可能在瞬时完全关闭，而需要一定的时间过程，因此可把整个关闭过程看作一系列微小瞬时关闭的总和。这样，每一次微小关闭都使阀门处水击压强增大一次，同时有一个相应的水击波向上游传播。事实上，由于阀门关闭过程是连续的，因此阀门处水击压强的增大过程和各个微小水击波传播的距离也是连续变化的。如果阀门按线性变化方式关闭，则水击压强的增大和各微小水击波传播距离的变化也是线性的，如图 13.4 所示。当阀门完全关闭时，

水击压强达到最大值 Δp_{max}（相应最大水击压强水头为 ΔH_{max}），以后水击波继续以波速 c 向上游传播，而上游各断面的水击压强亦相继达到最大值。图 13.4 中的虚线 1 表示阀门完全关闭以前某瞬时的水击压强水头分布线，此时阀门处水击压强水头 ΔH 尚未达到最大值 ΔH_{max}，则水击压强水头沿管道呈三角形分布。图 13.4 中的实线 2 表示阀门完全关闭以后某瞬时的水击压强水头分布线，此时阀门处水击压强水头已达到最大值 ΔH_{max}，并已沿管道传播一段距离，因此水击压强水头沿管道呈梯形分布。

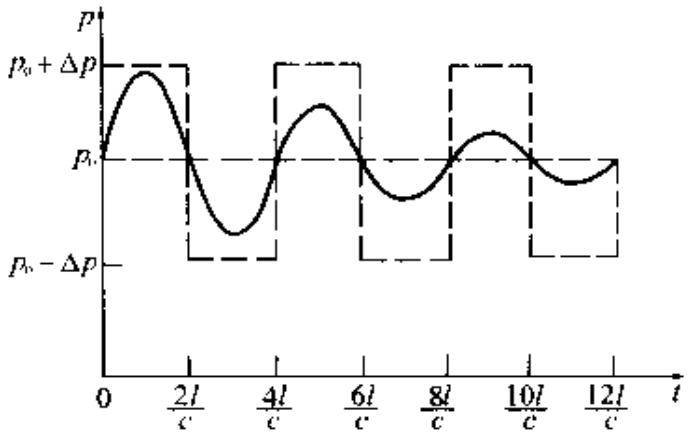


图 13.3

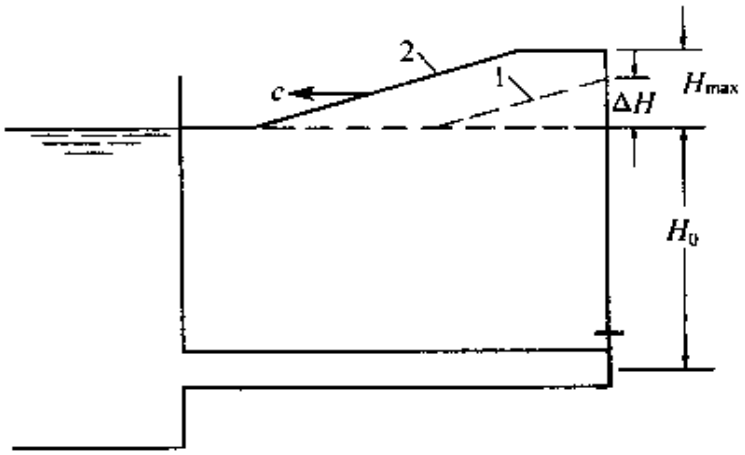


图 13.4

根据水击波传播的四个阶段，从阀门 A 端产生的每一个增压波传至进口 B 端时，将从 B 端以减压波的形式向 A 端反射。当反射波到达 A 端时，如果阀门已经或恰好完全关闭，则阀门处的水击压强已经达到最大值。如果反射波到达 A 端时，阀门尚未完全

关闭，此时反射的减压波将与阀门关闭时产生的部分增压波相抵消，则阀门处的水击压强就不可能达到上述的最大值。由于水击波返回 A 端的时间为一相 T_r，根据阀门启闭时间 T_s 与 T_r 的关系，可把水击分为两类：

1. 直接水击

当 $T_s \leqslant T_r$ 时，阀门处的水击压强未受到反射波的影响，能够达到最大值，这种水击称为直接水击。

2. 间接水击

当 $T_s > T_r$ 时，阀门处的水击压强受到反射波的影响，不能达到最大值，这种水击称为间接水击。

由于直接水击压强大于间接水击压强，工程中应尽量避免发生直接水击。

第三节　直接水击压强和水击波速

一、直接水击压强

直接水击压强计算公式可用动量定律求得。

图 13.5 所示为具有倾斜角 θ 的有压管道。经微小时段 Δt，水击波以速度 c 从断面 2 传至断面 1，则两断面间的距离 $\Delta s = c\Delta t$。设管中恒定流流速为 v_0，压强为 p_0，则水击波到达后的流速变为 v，压强变为 $p_0 + \Delta p$。同时水的密度 ρ 和管道断面积 A 亦相应增加 $\Delta\rho$ 和 ΔA。

取断面 1、断面 2 及其间的管壁所围成的控制体。作用于控制体内水体上的力(忽略管壁摩阻力)有：

1. 重力沿流动方向 s 的分量为

$$\rho g(A + \Delta A)\Delta s \cdot \sin\theta = \rho g(A + \Delta A)\Delta z$$

式中 Δz 为断面 1 和断面 2 中心点的高差。

2. 水体两端断面的压力差为

$$p_0 A - (p_0 + \rho g\Delta z + \Delta p)(A + \Delta A)$$

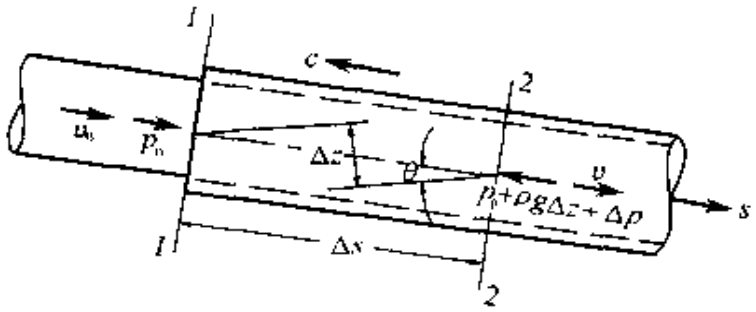


图 13.5

Δt 时段内控制体中水体动量的增量为

$$(\rho + \Delta\rho)(A + \Delta A)\Delta s v - \rho A \Delta s v_0$$

因为$\frac{\Delta s}{\Delta t} = c$，则单位时间内该水体动量的增量为

$$(\rho + \Delta\rho)(A + \Delta A)cv - \rho A c v_0$$

根据动量定律可得

$$\rho g(A + \Delta A)\Delta z + p_0 A - (p_0 + \rho g \Delta z + \Delta p)(A + \Delta A)$$
$$= (\rho + \Delta\rho)(A + \Delta A)cv - \rho A c v_0$$

展开上式，并略去含 ΔA 及 $\Delta\rho$ 的微小量后，得

$$\Delta p = \rho c(v_0 - v) \tag{13.1}$$

上式除以 ρg 得

$$\Delta H = \frac{c}{g}(v_0 - v) \tag{13.2}$$

以上二式分别为直接水击压强和压强水头的关系式，是儒柯夫斯基(Н.Е.Жуковский)于 1898 年提出的。该式表明直接水击压强 Δp 与水击波速 c 和流速变化值$(v_0 - v)$成正比。

例 13.1 某电站引水管道长 $l = 1600$ m，恒定流时管中流速 $v_0 = 3$ m/s。当管道末端阀门于 3 s 内完全关闭，已知水击波速 $c = 1000$ m/s，求水击压强水头 ΔH。

解： 水击相长 $T_r = \frac{2l}{c} = \frac{2 \times 1600\ \text{m}}{1000\ \text{m/s}} = 3.2\text{s}$，因 T_r 大于阀门关闭时间 $T_s = 3$ s，为直接水击。

水击压强水头

$$\Delta H = \frac{c}{g}(v_0 - v) = \frac{1000\ \text{m/s}}{9.81\ \text{m/s}^2}(3\ \text{m/s} - 0) = 305.8\ \text{m}$$

由此可知,直接水击引起的水击压强是相当大的。

二、水击波速

应用质量守恒定律、直接水击压强关系式以及应力与应变的关系,可导出水击波速公式。

仍以图 13.5 为例。Δt 时段内流进和流出控制体的水体质量差为

$$\rho A v_0 \Delta t - (\rho + \Delta\rho)(A + \Delta A)v\Delta t$$

同一时段内控制体中水体质量的增量为

$$(\rho + \Delta\rho)(A + \Delta A)\Delta s - \rho A \Delta s$$

根据质量守恒定律有

$$\rho A v_0 \Delta t - (\rho + \Delta\rho)(A + \Delta A)v\Delta t = (\rho + \Delta\rho)(A + \Delta A)\Delta s - \rho A \Delta s$$

展开上式,略去三阶微量得

$$[\rho A(v_0 - v) - (\rho \Delta A + \Delta\rho A)v]\Delta t = (\rho \Delta A + \Delta\rho A)\Delta s$$

因水击波速 $c = \frac{\Delta s}{\Delta t}$,且 c 比 v 大得多,故 $(\rho\Delta A + \Delta\rho A)v$ 与 $(\rho\Delta A + \Delta\rho A)c$ 相比可以忽略,则上式可写为

$$\rho A(v_0 - v) = (\rho \Delta A + \Delta\rho A)c$$

由式(13.1)可得 $v_0 - v = \frac{\Delta p}{\rho c}$。代入上式得

$$A\Delta p = (\rho \Delta A + \Delta\rho A)c^2$$

取 $\Delta t \to 0$ 时的极限,可得

$$A\,\mathrm{d}p = (\rho\,\mathrm{d}A + \mathrm{d}\rho A)c^2$$

整理得

$$c = \frac{1}{\sqrt{\rho\left(\frac{\mathrm{d}A}{A\,\mathrm{d}p} + \frac{\mathrm{d}\rho}{\rho\,\mathrm{d}p}\right)}} \tag{13.3}$$

设管径为 D，则

$$\frac{\mathrm{d}A}{A\mathrm{d}p}=\frac{\mathrm{d}(\frac{1}{4}\pi D^2)}{\frac{1}{4}\pi D^2\mathrm{d}p}=\frac{2\mathrm{d}D}{D\mathrm{d}p} \tag{13.4}$$

按材料力学中的胡克定律，应力与应变的关系为 $\mathrm{d}\sigma=E\frac{\mathrm{d}D}{D}$，即

$$\frac{\mathrm{d}D}{D}=\frac{\mathrm{d}\sigma}{E} \tag{13.5}$$

式中 σ 为管壁应力；E 为管壁弹性系数。常用管道的弹性系数值列于表 13.1。将式(13.5)代入式(13.4)得

$$\frac{\mathrm{d}A}{A\mathrm{d}p}=\frac{2\mathrm{d}\sigma}{E\mathrm{d}p} \tag{13.6}$$

表 13.1　　常用管道的弹性系数 E

管道种类	$E(\mathrm{N/m^2})$	K/E	备　注
钢　管	19.6×10^{10}	0.01	K 为水的弹性系数，取 $K=19.6\times10^8\ \mathrm{N/m^2}$。
铸铁管	9.8×10^{10}	0.02	
混凝土管	19.6×10^9	0.1	
木　管	9.8×10^9	0.2	

设管壁厚度为 δ。当管中液体压强增加 $\mathrm{d}p$，相应的管壁应力增加 $\mathrm{d}\sigma$(图 13.6)，则由液体压力与管壁拉力的平衡关系有 $2\delta\mathrm{d}\sigma=D\mathrm{d}p$，即

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}p}=\frac{D}{2\delta}$$

代入式(13.6)得

$$\frac{\mathrm{d}A}{A\mathrm{d}p}=\frac{D}{E\delta} \tag{13.7}$$

另外，根据质量等于密度与体积的乘积，当液体压强增加 $\mathrm{d}p$，

液体体积 V 减小 $\mathrm{d}V$，密度 ρ 增大 $\mathrm{d}\rho$，则液体体积压缩系数 β 和弹性系数 K 可表示为

$$\beta = \frac{1}{K} = \frac{\mathrm{d}V}{V\mathrm{d}p} = \frac{\mathrm{d}\rho}{\rho\mathrm{d}p} \tag{13.8}$$

由式(13.7)和式(13.8)可知，式(13.3)中的$\frac{\mathrm{d}A}{A\mathrm{d}p}$和$\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho\mathrm{d}p}$两项分别反映了管壁弹性和液体压缩性对水击波速的影响。

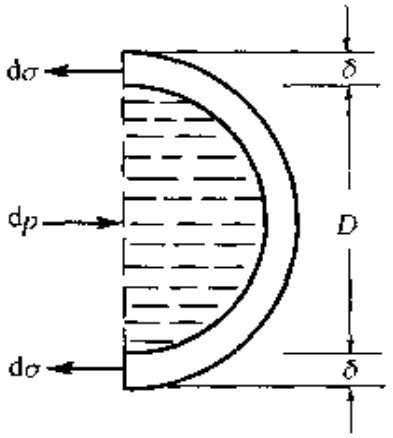


图 13.6

将式(13.7)及(13.8)代入式(13.3)得

$$c = \frac{1}{\sqrt{\rho\left(\frac{1}{K} + \frac{D}{\delta E}\right)}} = \frac{\sqrt{\frac{K}{\rho}}}{\sqrt{1 + \frac{DK}{\delta E}}} \tag{13.9}$$

由上式可知，水击波速 c 与液体密度 ρ 及弹性系数 K、管道弹性系数 E、管径 D、管壁厚度 δ 等因素有关。

对于水，当水温为 4℃、压强为 1 个大气压时，$\rho = 1000\ \mathrm{kg/m^3}$，$K = 2.06 \times 10^9\ \mathrm{N/m^2}$，则$\sqrt{\frac{K}{\rho}} = 1435\ \mathrm{m/s}$，代入式(13.9)得

$$c = \frac{1435}{\sqrt{1 + \frac{DK}{\delta E}}} \tag{13.10}$$

式中 c 的单位为 m/s。实际上式(13.10)对常温下压强在几十个大气压以内均可应用。

例 13.2 有一压力钢管，管径 $D = 0.5$ m，管壁厚度 $\delta = 0.01$ m。当管中发生水击时，求水击波速 c。

解： 由表 13.1 查得钢管的$\frac{K}{E} = 0.01$，则水击波速 c 可用式(13.10)求得：

$$c = \frac{1435\ \text{m/s}}{\sqrt{1 + \dfrac{DK}{\delta E}}} = \frac{1435\ \text{m/s}}{\sqrt{1 + \dfrac{0.5}{0.01}\dfrac{\text{m}}{\text{m}} \times 0.01}} = 1172\ (\text{m/s})$$

第四节　一元非恒定流基本方程

水击和调压系统中的水流属于一元非恒定流，本节将导出一元非恒定流的基本方程——连续方程、运动方程和能量方程，作为分析水击和调压系统非恒定流问题的基础。

一、一元非恒定流连续方程

在管道非恒定流中取断面 1 和断面 2 及其间的管壁所围成的控制体，两断面的距离为 $\mathrm{d}s$，如图 13.7 所示。如考虑液体的压缩

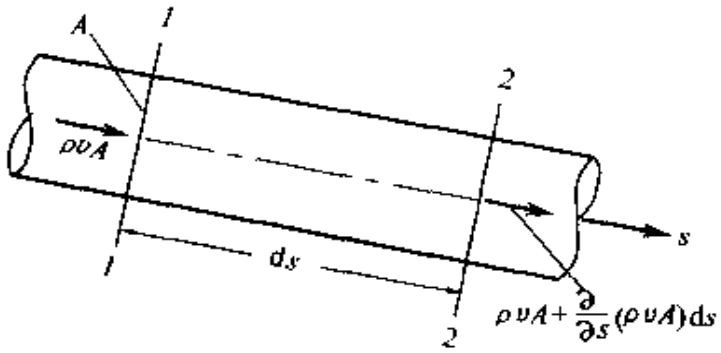


图 13.7

性和管壁的变形，则管道流速 v、过水断面积 A 及液体密度 ρ 均随时间 t 和距离 s 而变化。$\mathrm{d}t$ 时段内从断面 1 流入控制体的液体质量为 $\rho vA\mathrm{d}t$，从断面 2 流出控制体的液体质量为 $\left[\rho vA + \dfrac{\partial}{\partial s}(\rho vA)\mathrm{d}s\right]\mathrm{d}t$，则 $\mathrm{d}t$ 时段内流入和流出控制体的液体质量差为

$$\rho vA\mathrm{d}t - \left[\rho vA + \frac{\partial}{\partial s}(\rho vA)\mathrm{d}s\right]\mathrm{d}t = -\frac{\partial}{\partial s}(\rho vA)\mathrm{d}s\mathrm{d}t$$

在同一时段 $\mathrm{d}t$ 内，控制体内的液体质量从原来的 $\rho A\mathrm{d}s$ 增加到 $\rho A\mathrm{d}s + \dfrac{\partial}{\partial t}(\rho A\mathrm{d}s)\mathrm{d}t$，则其质量增量为

$$\rho A\mathrm{d}s + \frac{\partial}{\partial t}(\rho A\mathrm{d}s)\mathrm{d}t - \rho A\mathrm{d}s = \frac{\partial}{\partial t}(\rho A)\mathrm{d}s\mathrm{d}t$$

根据质量守恒定律，$\mathrm{d}t$ 时段内流入和流出控制体的液体质量差等于同一时段控制体内液体质量的增量，即

$$-\frac{\partial}{\partial s}(\rho vA)\mathrm{d}s\mathrm{d}t = \frac{\partial}{\partial t}(\rho A)\mathrm{d}s\mathrm{d}t$$

整理得

$$\frac{\partial}{\partial s}(\rho vA) + \frac{\partial}{\partial t}(\rho A) = 0 \tag{13.11}$$

上式为一元非恒定流连续方程，它考虑了液体压缩性和管壁变形的影响。

对不可压缩液体和管壁不变形的情况，ρ = 常数，且过水断面面积不随时间变化，有 $\frac{\partial}{\partial t}(\rho A) = \rho\frac{\partial A}{\partial t} = 0$，同时将流量 $Q = vA$ 代入，则式(13.11)可简化为

$$\frac{\partial Q}{\partial s} = 0$$

或

$$Q = C(t) \tag{13.12}$$

式中 $C(t)$ 为随时间 t 而变化的常数。式(13.12)为不可压缩液体管道一元非恒定流连续方程，它表明同一瞬时通过管道各过水断面的流量不变。

二、一元非恒定流运动方程和能量方程

在一元非恒定流中取任一元流流段 $\mathrm{d}s$ 的两端断面及流管管壁所围成的控制体，如图 13.8 所示。元流流速为 u，断面积为 $\mathrm{d}A$，元流中心线与水平线夹角为 θ，控制体两端断面中心点高差为 $\mathrm{d}z$，两断面中心点压强分别为 p 和 $p + \frac{\partial p}{\partial s}\mathrm{d}s$，元流侧面的切应力为 τ，控制体内液体重量为 $\mathrm{d}G$。

任一时刻 t，作用于控制体内液体的外力在流动方向 s 的投影有

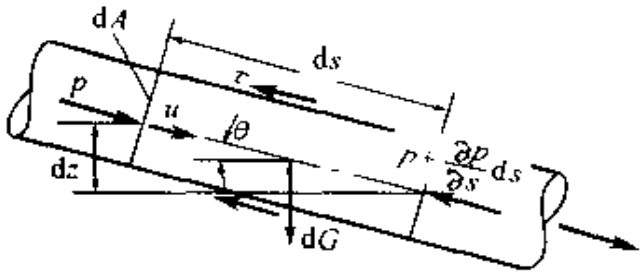


图 13.8

(1)重力：$\mathrm{d}G\sin\theta = \rho g \mathrm{d}A\mathrm{d}s\left(-\frac{\partial z}{\partial s}\right)$

(2)压力差：$\mathrm{d}P_1 - \mathrm{d}P_2 = p\mathrm{d}A - \left(p + \frac{\partial p}{\partial s}\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}A = -\frac{\partial p}{\partial s}\mathrm{d}s\mathrm{d}A$

(3)阻力：$-\mathrm{d}T = -\tau\mathrm{d}\chi\mathrm{d}s$($\mathrm{d}\chi$ 为元流湿周)

同时控制体内的液体质量 $\mathrm{d}m = \rho\mathrm{d}A\mathrm{d}s$，加速度沿 s 向的投影 $a_s = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$。

根据牛顿运动第二定律有

$$\mathrm{d}G\sin\theta + \mathrm{d}P_1 - \mathrm{d}P_2 - \mathrm{d}T = \mathrm{d}ma_s$$

即
$$-\frac{\partial z}{\partial s}\rho g\mathrm{d}A\mathrm{d}s - \frac{\partial p}{\partial s}\mathrm{d}A\mathrm{d}s - \tau\mathrm{d}\chi\mathrm{d}s = \rho\mathrm{d}A\mathrm{d}s\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \quad (13.13)$$

对一元非恒定流，u 是 t 和 s 的函数，则

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{u^2}{2}\right)$$

式(13.13)除以 $\rho g\mathrm{d}A\mathrm{d}s$，并将$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$的关系代入，整理得

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(z + \frac{p}{\rho g} + \frac{u^2}{2g}\right) = -\frac{\tau}{\rho g\mathrm{d}R} - \frac{1}{g}\frac{\partial u}{\partial t} \quad (13.14)$$

式中 $\mathrm{d}R = \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}\chi}$，为元流水力半径。式(13.14)为一元非恒定元流的运动方程。

设总流过水断面面积为 A，流量为 Q。将式(13.14)对总流积分，可得

$$\frac{1}{Q}\int_A \frac{\partial}{\partial s}\left(z+\frac{p}{\rho g}+\frac{u^2}{2g}\right)u\mathrm{d}A=\frac{1}{Q}\int_A\left(-\frac{\tau}{\rho g\mathrm{d}R}-\frac{1}{g}\frac{\partial u}{\partial t}\right)u\mathrm{d}A \tag{13.15}$$

在满足渐变流断面的条件下，上式左边第一、二两项的积分为

$$\frac{1}{Q}\int_A \frac{\partial}{\partial s}\left(z+\frac{p}{\rho g}\right)u\mathrm{d}A=\frac{\partial}{\partial s}\left(z+\frac{p}{\rho g}\right)$$

左边第三项积分为

$$\frac{1}{Q}\int_A \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{u^2}{2g}\right)u\mathrm{d}A=\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\alpha v^2}{2g}\right)$$

式中 v 为断面平均流速；α 为动能校正系数。

因为$\frac{\tau}{\rho g\mathrm{d}R}$为作用于元流单位重量液体上的阻力，$\frac{\tau}{\rho g\mathrm{d}R}\mathrm{d}s$ 则为元流单位重量液体上的阻力在流段 $\mathrm{d}s$ 上所作的功，它恰好等于元流在该流段内的水头损失 h_w'，即$\frac{\tau}{\rho g\mathrm{d}R}\mathrm{d}s=h_w'$，因此，$\frac{\partial h_w'}{\partial s}=\frac{\tau}{\rho g\mathrm{d}R}$可代表元流单位距离上的水头损失。因此，式(13.15)右边第一项积分为

$$-\frac{1}{Q}\int_A \frac{\tau}{\rho g\mathrm{d}R}u\mathrm{d}A=-\frac{1}{Q}\int_A \frac{\partial h_w'}{\partial s}u\mathrm{d}A=-\frac{\partial h_w}{\partial s}$$

式中$\frac{\partial h_w}{\partial s}$为总流单位距离上的水头损失。

式(13.15)右边第二项积分为

$$-\frac{1}{Q}\int_A \frac{1}{g}\frac{\partial u}{\partial t}u\mathrm{d}A=-\frac{\beta}{g}\frac{\partial v}{\partial t}$$

式中 β 为动量校正系数。

将以上各积分式代入式(13.15)得

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(z+\frac{p}{\rho g}+\frac{\alpha v^2}{2g}\right)=-\frac{\partial h_w}{\partial s}-\frac{\beta}{g}\frac{\partial v}{\partial t} \tag{13.16}$$

上式为一元非恒定总流的运动方程。

式(13.16)乘以 $\mathrm{d}s$，并从断面 1 到断面 2 积分，可得

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + h_w + h_i \quad (13.17)$$

上式为一元非恒定总流的能量方程。式中 h_w 为从总流断面 1 至断面 2 的水头损失；$h_i = \frac{\beta}{g}\int_1^2 \frac{\partial v}{\partial t} ds$，为从总流断面 1 至断面 2 单位重量液体由于速度随时间变化而转化的能量，称为惯性水头。当$\frac{\partial v}{\partial t} > 0$，该段液流流速和动能随时间而增大，$h_i$ 为正值；反之，则 h_i 为负值。惯性水头 h_i 与水头损失 h_w 不同，前者仍储存在液体内而没有消耗，后者则转化为热能而散失，不复存在于液流中。式(13.17)与恒定总流能量方程(3.27)相比较，增加了惯性水头一项，它反映了非恒定流动的特点。该式表达了非恒定总流各项单位能量之间的守恒关系。

第五节　水击基本方程

根据一元非恒定流基本方程可导出水击基本方程。

一、水击连续方程

引用一元非恒定流连续方程(13.11)：

$$\frac{\partial}{\partial s}(\rho v A) + \frac{\partial}{\partial t}(\rho A) = 0$$

展开得

$$\rho v \frac{\partial A}{\partial s} + \rho A \frac{\partial v}{\partial s} + v A \frac{\partial \rho}{\partial s} + \rho \frac{\partial A}{\partial t} + A \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

全式除以 ρA，可得

$$\frac{\partial v}{\partial s} + \frac{1}{A}\left(\frac{\partial A}{\partial t} + v \frac{\partial A}{\partial s}\right) + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + v \frac{\partial \rho}{\partial s}\right) = 0$$

由于 $A = A(s,t)$，$\rho = \rho(s,t)$，则有

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial s}\frac{ds}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + v \frac{\partial A}{\partial s}$$

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + v\frac{\partial \rho}{\partial s}$$

将以上$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}$及$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}$的关系式代入上述连续方程得

$$\frac{\partial v}{\partial s} + \frac{1}{A}\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{13.18}$$

上式第二项表示管道断面积随时间的相对变化率。由式(13.7):$\frac{\mathrm{d}A}{A\mathrm{d}p} = \frac{D}{E\delta}$,可得

$$\frac{1}{A}\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \frac{D}{E\delta}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}$$

式(13.18)中第三项表示液体密度随时间的相对变化率。由式(13.8):$\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho\mathrm{d}p} = \frac{1}{K}$,可得

$$\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{K}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}$$

将第二、三两项的关系代入式(13.18)得

$$\frac{\partial v}{\partial s} + \frac{1}{K}\left(1 + \frac{KD}{E\delta}\right)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{13.19}$$

由水击波速公式(13.9)可得

$$\frac{1}{K}\left(1 + \frac{KD}{E\delta}\right) = \frac{1}{c^2\rho}$$

代入式(13.19)得

$$\frac{\partial v}{\partial s} + \frac{1}{c^2\rho}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{13.20}$$

由于 $p = \rho g(H - z)$,且密度 ρ 随 s 和 t 的变化远小于水头 H 随 ρ 和 t 的变化,故可近似认为 ρ = 常数,则

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = \rho g\left(\frac{\partial H}{\partial t} - \frac{\partial z}{\partial t}\right) + v\rho g\left(\frac{\partial H}{\partial s} - \frac{\partial z}{\partial s}\right)$$

因管道位置不随 t 变化,$\frac{\partial z}{\partial t} = 0$,且$\frac{\partial z}{\partial s} = -\sin\theta$($\theta$ 为管道倾角),则

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = \rho g \frac{\partial H}{\partial t} + v\rho g\left(\frac{\partial H}{\partial s} + \sin\theta\right)$$

代入式(13.20)得

$$\frac{\partial v}{\partial s} + \frac{g}{c^2}\left[\frac{\partial H}{\partial t} + v\left(\frac{\partial H}{\partial s} + \sin\theta\right)\right] = 0 \qquad (13.21)$$

上式为水击连续方程的一般形式。

一般情况下，H、z 随 s 的变化与 H 随 t 的变化相比要小得多，含$\frac{\partial H}{\partial s}$及 $\sin\theta$ 的项可以略去，则式(13.21)可简化为

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{c^2}{g}\frac{\partial v}{\partial s} \qquad (13.22)$$

上式为水击连续方程的简化形式。

二、水击运动方程

将 $H = z + \frac{p}{\rho g}$，水力坡度 $J = \frac{\partial h_w}{\partial s} = \frac{\lambda}{D}\frac{v^2}{2g}$（$\lambda$ 为沿程水头损失系数）代入一元非恒定流运动方程(13.16)，并取 $\alpha = \beta = 1$，可得

$$\frac{\partial H}{\partial s} + \frac{1}{g}\left(\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial s}\right) + \frac{\lambda}{D}\frac{v^2}{2g} = 0$$

由于水击波传播过程中流速不断改变方向，为使摩阻力方向保持与流速方向相反，将上式阻力项中的 v^2 改写为 $v|v|$，则上式改为

$$\frac{\partial H}{\partial s} + \frac{1}{g}\left(\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial s}\right) + \frac{\lambda}{D}\frac{v|v|}{2g} = 0 \qquad (13.23)$$

上式为考虑摩阻力影响的水击运动方程。

如不计摩阻力的影响，并考虑到 v 随 s 的变化与 v 随 t 的变化相比要小得多，略去含$\frac{\partial v}{\partial s}$的一项，上式可简化为

$$\frac{\partial H}{\partial s} = -\frac{1}{g}\frac{\partial v}{\partial t} \qquad (13.24)$$

上式为不计摩阻力影响的水击运动方程。

三、水击基本方程

应用简化后的水击连续方程和水击运动方程可导出水击基本方程。

因水击波一般从阀门处开始传播，为方便起见，取阀门为坐标零点，沿管轴向上游取 x 坐标以代替沿恒定流流向坐标 s，即以 $-\frac{\partial}{\partial x}$ 代替 $\frac{\partial}{\partial s}$，则式(13.22)和(13.24)可改写为

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial t} &= \frac{c^2}{g}\frac{\partial v}{\partial x}\\ \frac{\partial H}{\partial x} &= \frac{1}{g}\frac{\partial v}{\partial t}\end{aligned}\right\}$$

将以上方程组先分别对 t 及 x 求导，再分别对 x 及 t 求导，整理可得

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} &= \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 H}{\partial t^2}\\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\end{aligned}\right\} \tag{13.25}$$

这一方程组在高等数学中称为波动方程。波动方程的一般解可表示为

$$\left.\begin{aligned}H - H_0 &= F\left(t - \frac{x}{c}\right) + f\left(t + \frac{x}{c}\right)\\ v - v_0 &= -\frac{g}{c}\left[F\left(t - \frac{x}{c}\right) - f\left(t + \frac{x}{c}\right)\right]\end{aligned}\right\} \tag{13.26}$$

式中 H_0 和 v_0 分别为恒定流时的水头和流速；H 和 v 分别为任意断面 x 处任意时刻 t 的水头和流速；F 和 f 为 x 和 t 的两个未知函数，称为波函数。式(13.26)即为水击基本方程，该方程组忽略了阻力对水击波传播过程的影响。式(13.26)表明任意断面 x 处任意时刻 t 的水击压强水头($\Delta H = H - H_0$)和流速增量($\Delta v = v - v_0$)决定于波函数 F 和 f。

波函数 F 和 f 的物理意义可说明如下。现假设波函数 F 代表从阀门向水库传播的水击逆波。因为式(13.26)忽略了阻力的影响,则该水击波在传播过程中其波形(即产生的水击压强水头)应保持不变。设有一水击逆波以波速 c 从阀门向水库传播,t_1 时位于 x_1,其相应的波函数为 $F(t_1-\frac{x_1}{c})$。t_2 时刻该水击波传至 x_2(见图 13.9),则相应波函数为 $F(t_2-\frac{x_2}{c})$。由于 $x_2=x_1+c(t_2-t_1)$,则

$$F(t_2-\frac{x_2}{c})=F[t_2-\frac{x_1+c(t_2-t_1)}{c}]$$

$$=F(t_1-\frac{x_1}{c})$$

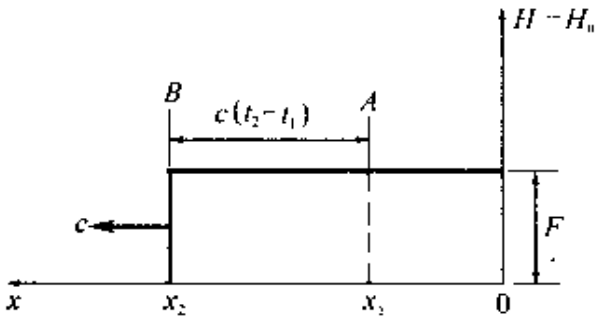


图 13.9

上式表明在上述条件下波函数值保持不变,即波函数 F 就是一个以波速 c 从阀门向水库传播的水击逆波。

同理可证明波函数 f 是一个以波速 c 从水库向阀门传播的水击顺波,在传播过程中波形同样保持不变。

根据波函数的物理意义,水击基本方程(13.26)表明任意断面任意时刻的水击压强水头和流速增量是由逆行和顺行的两组水击波相叠加而形成的。

应用水击基本方程求解水击问题时,首先,必须确定波函数 F 和 f,而 F 和 f 的具体形式又取决于管道两端的边界条件。但因边界条件的复杂性,F 和 f 的形式往往难以确定。为了避免上述

困难，下面介绍可直接求解水击问题的关系式——水击联锁方程。

四、水击联锁方程

将方程组(13.26)中的两式相减，消去函数 f 得

$$(H - H_0) - \frac{c}{g}(v - v_0) = 2F(t - \frac{x}{c}) \qquad (13.27)$$

上式只含波函数 F，表明该式是由水击逆波引起的水击压强水头与流速增量之间的关系式。

在管道中取断面 A 和 B，其坐标分别为 x_1 和 x_2。设有一逆行波于 t_1 时刻到达断面 A，其水头为 $H_{t_1}^A$，流速为 $v_{t_1}^A$；该逆行波于 t_2 时刻到达断面 B，其水头为 $H_{t_2}^B$，流速为 $v_{t_2}^B$。将以上数值分别代入式(13.27)，可得

$$(H_{t_1}^A - H_0) - \frac{c}{g}(v_{t_1}^A - v_0) = 2F(t_1 - \frac{x_1}{c})$$

$$(H_{t_2}^B - H_0) - \frac{c}{g}(v_{t_2}^B - v_0) = 2F(t_2 - \frac{x_2}{c})$$

因水击波传播时波形不变，即 $F(t_1 - \frac{x_1}{c}) = F(t_2 - \frac{x_2}{c})$，以上二式右边相等，故以上二式左边也相等，并考虑到相应的水击压强水头 $\Delta H_{t_1}^A = H_{t_1}^A - H_0$，$\Delta H_{t_2}^B = H_{t_2}^B - H_0$，可得

$$\Delta H_{t_1}^A - \Delta H_{t_2}^B = \frac{c}{g}(v_{t_1}^A - v_{t_2}^B) \qquad (13.28)$$

上式表明，当水击逆波于 t_1 时刻位于断面 A，于 t_2 时刻恰好到达断面 B 时，A、B 两断面的水击压强水头和流速必然满足式(13.28)的关系。

将方程组(13.26)中的两式相加，消去函数 F 得

$$(H - H_0) + \frac{c}{g}(v - v_0) = 2f(t + \frac{x}{c}) \qquad (13.29)$$

上式只含波函数 f，表明该式是由水击顺波引起的水击压强水头与流速增量之间的关系式。

设有一顺行波于 t_3 时刻到达断面 B，其水头为 $H_{t_3}^B$，流速为 $v_{t_3}^B$；该顺行波于 t_4 时刻到达断面 A，其水头为 $H_{t_4}^A$，流速为 $v_{t_4}^A$。分别代入式(13.29)得

$$(H_{t_3}^B - H_0) + \frac{c}{g}(v_{t_3}^B - v_0) = 2f(t_3 + \frac{x_2}{c})$$

$$(H_{t_4}^A - H_0) + \frac{c}{g}(v_{t_4}^B - v_0) = 2f(t_4 + \frac{x_1}{c})$$

同样由于 $f(t_3 + \frac{x_2}{c}) = f(t_4 + \frac{x_1}{c})$，并考虑到 $\Delta H_{t_4}^A = H_{t_4}^A - H_0$，$\Delta H_{t_3}^B = H_{t_3}^B - H_0$，可得

$$\Delta H_{t_4}^A - \Delta H_{t_3}^B = -\frac{c}{g}(v_{t_4}^A - v_{t_3}^B) \tag{13.30}$$

上式表明，当水击顺波于 t_3 时刻位于断面 B，t_4 时刻恰好到达断面 A 时，A、B 两断面的水击压强水头和流速必然满足式(13.30)的关系。

应用式(13.29)和(13.30)，就可根据某一断面某一时刻的已知水击压强水头和流速求解另一断面相应时刻的未知水击压强水头和流速。由于需依次反复运用逆波方程(13.29)和顺波方程(13.30)来求解水击问题，故将该两方程称为水击联锁方程。

引入下列三个无量纲量：相对水击压强水头 $\zeta = \frac{\Delta H}{H_0}$；相对流速 $\eta = \frac{v}{v_m}$，v_m 为管中最大流速；管道特征系数 $\mu = \frac{cv_m}{2gH_0}$，它与管道材料、断面尺寸及恒定流水力要素有关，与时间 t 无关，即不随水击波传播而变化，计算时为一常数。将式(13.28)和(13.30)分别除以 H_0，并代入上述无量纲量，可得

$$\left.\begin{aligned}\zeta_{t_1}^A - \zeta_{t_2}^B &= 2\mu(\eta_{t_1}^A - \eta_{t_2}^B)\\ \zeta_{t_4}^A - \zeta_{t_3}^B &= -2\mu(\eta_{t_4}^A - \eta_{t_3}^B)\end{aligned}\right\} \tag{13.31}$$

上式为无量纲形式的水击联锁方程，常用于求解不计阻力影响的

简单管道的各种水击问题。

第六节　简单管道水击压强计算

应用水击联锁方程计算简单管道水击压强时，应结合初始条件和边界条件求解。

一、初始条件和边界条件

初始条件是指发生水击前管道中的流动状态。如水击前管中水流一般为恒定流，则 $t=0$ 时刻（初始时刻），全管水头 $H=H_0$，全管流速 $v=v_0$。一般忽略流速水头和水头损失，H_0 按静力水头计算。v_0 可用恒定管流公式计算。

边界条件包括管道下游阀门 A 和上游水库 B 两个边界的水力条件。

对上边界 B，因水库水位保持不变，则有

$$H_t^B = H_0 = 常数$$

或

$$\zeta_t^B = \frac{\Delta H_t^B}{H_0} = \frac{H_t^B - H_0}{H_0} = \frac{H_0 - H_0}{H_0} = 0 \qquad (13.32)$$

对下边界 A，其水力条件（如流速、流量等）决定于阀门形式及阀门启闭方式。阀门处的流量一般可近似按孔口流量公式计算。

发生水击前，如阀门全开，水流为恒定流，其流量为

$$Q_m = \mu_0 A_m \sqrt{2gH_0}$$

式中 A_m 为阀门最大开度；Q_m 为管道最大流量；μ_0 为阀门全开时的流量系数。

发生水击时，阀门局部关闭，其流量为

$$Q_t = \mu_t A_t \sqrt{2gH_t^A}$$

式中 A_t、H_t^A、μ_t、Q_t 分别为 t 时刻的阀门开度、水头、流量系数和流量。因为

$$H_t^A = H_0 + \Delta H_t^A = H_0 + (H_t^A - H_0)$$

$$= H_0\left(1 + \frac{H_t^A - H_0}{H_0}\right) = H_0(1 + \zeta_t^A)$$

代入上式得

$$Q_t = \mu_t A_t \sqrt{2gH_0(1 + \zeta_t^A)}$$

于是

$$\frac{Q_t}{Q_m} = \frac{\mu_t A_t}{\mu_0 A_m}\sqrt{1 + \zeta_t^A}$$

设管道断面积为 A，则 $Q_t = Av_t^A$，$Q_m = Av_m^A$，$\frac{Q_t}{Q_m} = \frac{v_t^A}{v_m^A} = \eta_t^A$，为 t 时刻断面 A 的相对流速。一般可近似认为流量系数不随阀门开度变化，即 $\mu_t = \mu_0 =$ 常数。将这些关系代入上式得

$$\eta_t^A = \tau_t\sqrt{1 + \zeta_t^A} \tag{13.33}$$

式中 $\tau_t = \frac{A_t}{A_m}$，为阀门相对开度。式(13.33)即为水击的下边界条件。

阀门相对开度 τ_t 随时间 t 的变化规律取决于阀门启闭规律，由于电站阀门启闭由调速器操纵，故又与调速器特性有关。一般说 τ_t 随 t 的变化规律是非线性的，但亦可近似地按线性变化考虑。图 13.10 表示阀门关闭时 τ_t 随 t 的线性变化关系。图中 T_s 为阀门关闭时间，τ_0 为初始时刻阀门相对开度。由图中几何关系可得

$$\tau_t = \tau_0\left(1 - \frac{t}{T_s}\right) \tag{13.34}$$

当初始时刻阀门为全开时，$\tau_0 = 1$，则上式写为

$$\tau_t = 1 - \frac{t}{T_s} \tag{13.35}$$

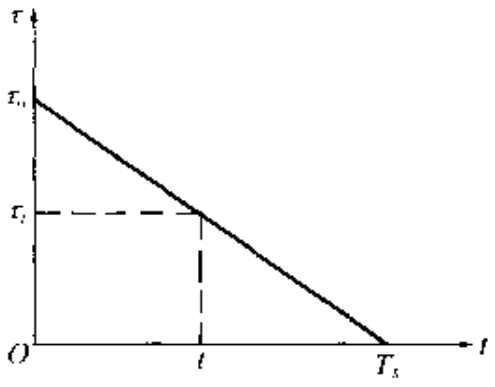


图 13.10

二、水击压强计算

根据初始条件和边界条

件，应用水击联锁方程即可计算管道任意断面任意时刻的水击压强。但工程中最重要的是确定最大水击压强值，因为它是水电站引水管道设计的主要依据。

由于水击波是在阀门处产生的，而从水库反射回来的减压波又总是最后才到达阀门处，即阀门处的水击升压受减压波的影响最迟，因此最大水击压强必然发生在阀门断面 A 处。又因断面 A 的水击压强必需经过一个相长的时间才会发生变化，故只需计算各相末断面 A 的水击压强，即可确定最大水击压强值。如为直接水击，则第一相末断面 A 的水击压强即为最大水击压强。

先求第一相末断面 A 的水击压强。设管长为 l。应用水击联锁方程(13.31)中的逆波方程：

$$\zeta_{t_1}^{A} - \zeta_{t_2}^{B} = 2\mu(\eta_{t_1}^{A} - \eta_{t_2}^{B})$$

水击开始在断面 A 发生时，$t_1 = 0$，则 $\zeta_{t_1}^{A} = \zeta_0^{A}$，$\eta_{t_1}^{A} = \eta_0^{A}$。水击波从下游断面 A 传至上游进口断面 B 所需的时间 $t_2 = \dfrac{l}{c} = 0.5$ 相，若以相作为时间单位，则 $\zeta_{t_2}^{B} = \zeta_{0.5}^{B}$，$\eta_{t_2}^{B} = \eta_{0.5}^{B}$。代入逆波方程得

$$\zeta_0^{A} - \zeta_{0.5}^{B} = 2\mu(\eta_0^{A} - \eta_{0.5}^{B})$$

由初始条件 $H_0^{A} = H_0$，有

$$\zeta_0^{A} = \frac{\Delta H_0^{A}}{H_0} = \frac{H_0^{A} - H_0}{H_0} = 0$$

由上边界条件(13.32)，有 $\zeta_{0.5}^{B} = 0$。由下边界条件(13.33)有

$$\eta_0^{A} = \tau_0\sqrt{1 + \zeta_0^{A}} = \tau_0$$

代入逆波方程得 $\eta_{0.5}^{B} = \tau_0$。

再应用水击联锁方程(13.31)中的顺波方程

$$\zeta_{t_4}^{A} - \zeta_{t_3}^{B} = -2\mu(\eta_{t_4}^{A} - \eta_{t_3}^{B})$$

由于 t_3 为水击顺波从断面 B 开始向下游传播的时间，所以 $t_3 = 0.5$ 相。水击顺波传到断面 A 的时间 $t_4 = \dfrac{2l}{c} = 1$ 相。则上式写为

$$\zeta_1^A - \zeta_{0.5}^B = -2\mu(\eta_1^A - \eta_{0.5}^B)$$

将 $\zeta_{0.5}^B = 0$，$\eta_{0.5}^B = \tau_0$ 及下边界条件 $\eta_1^A = \tau_1\sqrt{1+\zeta_1^A}$ 代入上式，整理得

$$\tau_1\sqrt{1+\zeta_1^A} = \tau_0 - \frac{\zeta_1^A}{2\mu} \tag{13.36}$$

式中 τ_1 为第一相末的阀门相对开度。上式为计算断面 A 第一相末水击压强的关系式。

对于直接水击，第一相末的流速 $v_1^A = v$（阀门关闭完毕时的流速），且管中最大流速 $v_m = v_0$，则 $\eta_1^A = \frac{v_1^A}{v_0} = \frac{v}{v_0}$。又因 $\eta_1^A = \tau_1\sqrt{1+\zeta_1^A}$，则 $\frac{v}{v_0} = \tau_1\sqrt{1+\zeta_1^A}$。代入式(13.36)得

$$\frac{v}{v_0} = \tau_0 - \frac{\zeta_1^A}{2\mu}$$

以 $\zeta_1^A = \frac{\Delta H_1^A}{H_0}$，$\mu = \frac{cv_m}{2gH_0} = \frac{cv_0}{2gH_0}$，$\tau_0 = 1$（最大开度）代入上式，整理得

$$\Delta H_1^A = \frac{c}{g}(v_0 - v)$$

这就是前面已经导出的直接水击压强水头关系式(13.2)。

同样再应用水击联锁方程(13.31)和上、下边界条件可求得断面 A 第二相末的水击压强关系式为

$$\tau_2\sqrt{1+\zeta_2^A} = \tau_0 - \frac{\zeta_2^A}{2\mu} - \frac{\zeta_1^A}{\mu}$$

以及断面 A 第 n 相末的水击压强关系式为

$$\tau_n\sqrt{1+\zeta_n^A} = \tau_0 - \frac{\zeta_n^A}{2\mu} - \frac{1}{\mu}\sum_{i=1}^{n-1}\zeta_i^A \tag{13.37}$$

上式为求解断面 A 任一相末水击压强的普遍关系式。由于求解第 n 相末水击压强时必须先知道前面各相末的水击压强，因此求解的步骤应该是依次逐相进行计算。

大量实际资料表明，当阀门开度按线性变化时，间接水击最大水击压强发生的时间一般有以下两种情况：一种情况是最大水击压强发生在第一相末，此后各相水击压强围绕某一极限值 ζ_m 上下变动，并最后趋于 ζ_m，如图 13.11(a)所示。这种水击称为首相水击。另一种情况是水击压强随相数的增加而逐渐增大，在阀门关闭时间 T_s 的最后一相达到最大值，并趋近于某一极限值 ζ_m，如

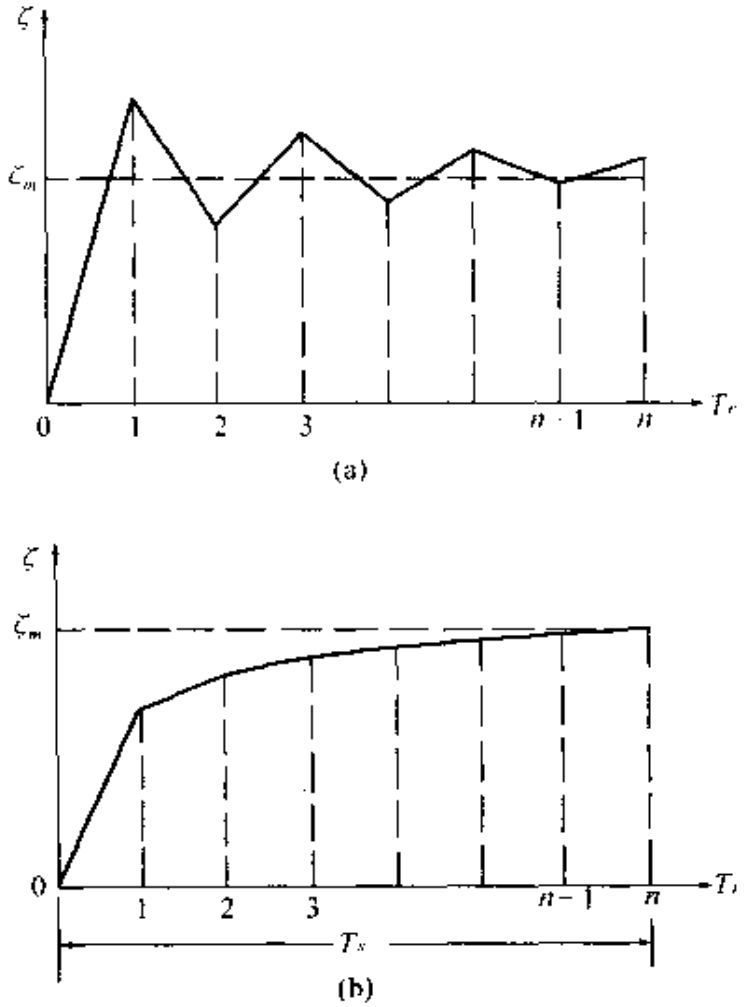


图 13.11

图 13.11(b)所示。这种水击称为末相水击。如果发生首相水击，最大水击压强可按式(13.36)计算。如果发生末相水击，最大水击压强可根据相数用式(13.37)计算。当相数较多时，如应用式

(13.37)求解末相水击压强，必需先计算前面各相的水击压强，这样计算工作量太大。下面推导直接计算末相水击压强的公式。

根据式(13.37)可写出断面 A 第 $n+1$ 相水击压强关系式为

$$\tau_{n+1}\sqrt{1+\zeta_{n+1}^{A}}=\tau_0-\frac{\zeta_{n+1}^{A}}{2\mu}-\frac{1}{\mu}\sum_{i=1}^{n}\zeta_i^{A} \tag{13.38}$$

将式(13.38)与(13.37)相减，并可认为 $\zeta_n^A\approx\zeta_{n+1}^A\approx\zeta_m^A$，可得

$$(\tau_{n+1}-\tau_n)\sqrt{1+\zeta_m^A}=-\frac{\zeta_m^A}{\mu}$$

令 $\tau_{n+1}-\tau_n=\Delta\tau$。由图13.12所示的阀门线性关闭图中的几何关系可得 $\Delta\tau=\tau_{i+1}-\tau_i=-\frac{2l}{cT_s}$。代入上式得

$$\mu\frac{2l}{cT_s}\sqrt{1+\zeta_m^A}=\zeta_m^A$$

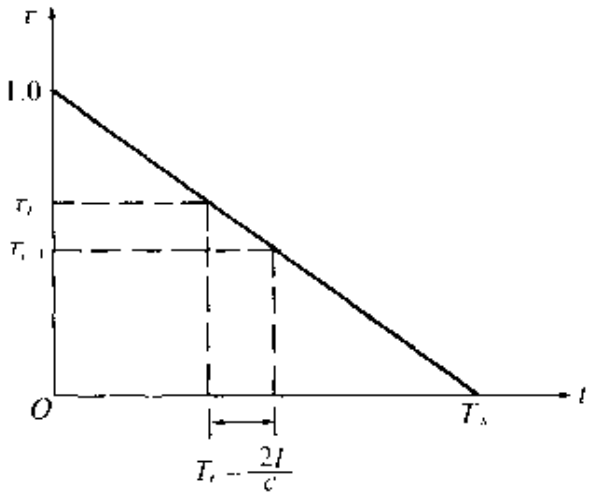


图 13.12

令 $\sigma=\mu\frac{2l}{cT_s}=\frac{cv_m}{2gH_0}\cdot\frac{2l}{cT_s}=\frac{v_m l}{gH_0T_s}$，它不随水击波传播而变化，称为水击常数。代入上式得

$$\sigma\sqrt{1+\zeta_m^A}=\zeta_m^A$$

解上式得

$$\zeta_m^A=\frac{\sigma}{2}(\sqrt{\sigma^2+4}+\sigma) \tag{13.39}$$

这就是末相水击压强关系式。

下面来判别首相水击和末相水击的类型。首相水击和末相水击的分界线应满足的条件为 $\zeta_1^A=\zeta_m^A$。将此条件代入首相水击关系式(13.36)，同时考虑到 $\tau_1-\tau_0=\Delta\tau=-\frac{2l}{cT_s}=-\frac{\sigma}{\mu}$，即 $\tau_1=\tau_0-$

$\frac{\sigma}{\mu}$，可得

$$(\tau_0 - \frac{\sigma}{\mu})\sqrt{1 + \zeta_m^1} = \tau_0 - \frac{\zeta_m^A}{2\mu}$$

将末相水击压强关系式(13.39)代入上式，消去 ζ_m^A，得

$$\sigma = \frac{4\mu\tau_0(1 - \mu\tau_0)}{1 - 2\mu\tau_0} \tag{13.40}$$

上式为首相和末相水击分界线方程。以 σ 和 $\mu\tau_0$ 分别为纵、横坐标，将式(13.40)绘成图 13.13 中的曲线，曲线以左为首相水击区，曲线以右则为末相水击区。若已知 σ 及 $\mu\tau_0$ 值，即可由图 13.13 判别所发生的水击类型。

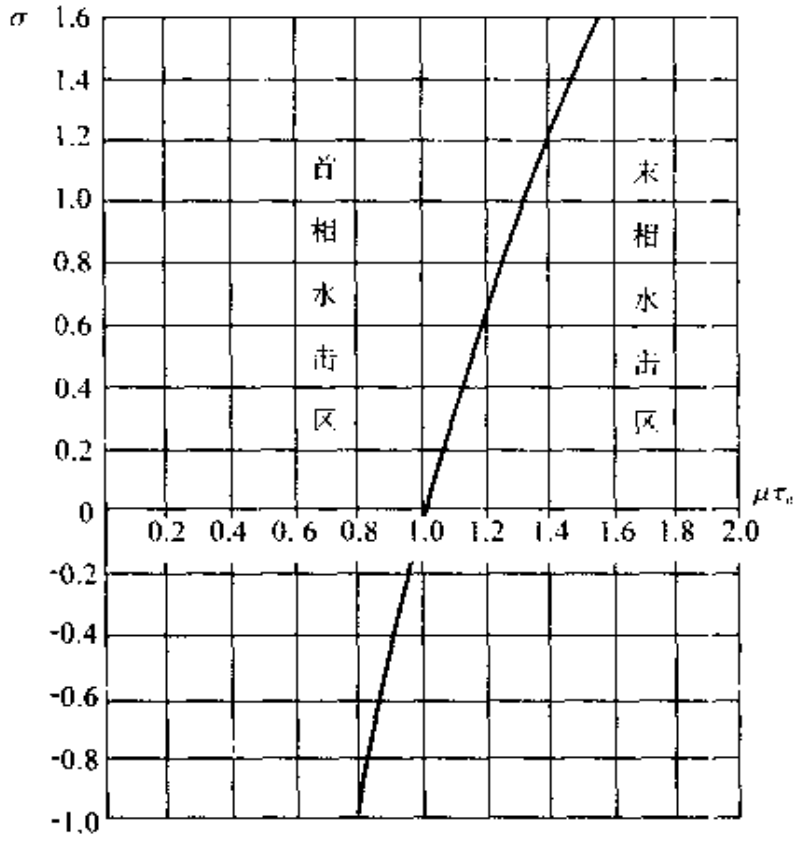


图 13.13

例 13.3 某电站引水钢管，长度 $l = 560$ m，直径 $D = 0.3$ m，管壁厚度 $\delta = 0.01$ m。恒定流时的水头 $H_0 = 80$ m，流速 $v_0 = 3$ m/s。阀门在 10 s 内从全

开至全关，求最大水头 H_{max}。

解： 从表 13.1 查得钢管的 $\frac{K}{E}=0.01$，代入式(13.10)得水击波速

$$c=\frac{1435\ \text{m/s}}{\sqrt{1+\frac{DK}{\delta E}}}=\frac{1435\ \text{m/s}}{\sqrt{1+\frac{0.3\ \text{m}}{0.01\ \text{m}}\times 0.01}}=1259\ \text{m/s}$$

相长 $$T_r=\frac{2l}{c}=\frac{2\times 560\ \text{m}}{1259\ \text{ms}^{-1}}=0.89\ \text{s}$$

$T_r<T_s=10$ s，发生间接水击。管道特征系数

$$\mu=\frac{cv_m}{2gH_0}=\frac{cv_0}{2gH_0}=\frac{1259\ \text{ms}^{-1}\times 3\ \text{ms}^{-1}}{2\times 9.81\ \text{ms}^{-2}\times 80\ \text{m}}=2.406$$

水击常数

$$\sigma=\frac{v_m l}{gH_0T_s}=\frac{v_0 l}{gH_0T_s}=\frac{3\ \text{ms}^{-1}\times 560\ \text{m}}{9.81\ \text{ms}^{-2}\times 80\ \text{m}\times 10\ \text{s}}=0.214$$

恒定流时阀门全开，$\tau_0=1$，则 $\mu\tau_0=2.406\times 1=2.406$。根据所求 $\mu\tau_0$ 及 σ 值从图 13.13 判知发生末相水击。按式(13.39)可求得阀门处最大相对水击压强水头

$$\zeta_m^1=\frac{\sigma}{2}(\sqrt{\sigma^2+4}+\sigma)=\frac{0.214}{2}(\sqrt{0.214^2+4}+0.214)$$

$$=0.2382$$

最大水击压强水头

$$\Delta H_m^1=\zeta_m^1 H_0=0.2382\times 80\ \text{m}=19.06\ \text{m}$$

最大水头

$$H_{max}=H_0+\Delta H_m^1=80\ \text{m}+19.06\ \text{m}=99.06\ \text{m}$$

例 13.4 按例 13.3 的管道，若恒定流时阀门初始开度 $\tau_0=0.6$，管中流速 $v_0=1.5$ m/s，阀门在 5 s 内完全关闭，其他条件不变，求最大水头 H_{max}。

解： 由例 13.3 已求得 $T_r=0.89$ s，因 $T_r<T_s=5$ s，发生间接水击。

管道特征系数

$$\mu=\frac{cv_m}{2gH_0}=\frac{cv_0}{2gH_0}=\frac{1259\ \text{ms}^{-1}\times 1.5\ \text{ms}^{-1}}{2\times 9.81\ \text{ms}^{-2}\times 80\ \text{m}}=1.203$$

水击常数

$$\sigma=\frac{v_m l}{gH_0T_s}=\frac{v_0 l}{gH_0T_s}=\frac{1.5\ \text{ms}^{-1}\times 560\ \text{m}}{9.81\ \text{ms}^{-2}\times 80\ \text{m}\times 5\ \text{s}}=0.214$$

$$\mu\tau_0 = 1.203 \times 0.6 = 0.7218$$

按所求 $\mu\tau_0$ 及 σ 值由图 13.13 判知发生首相水击。

第一相末阀门相对开度用式(13.34)计算：

$$\tau_1 = \tau_0\left(1 - \frac{t}{T_s}\right) = \tau_0\left(1 - \frac{T_r}{T_s}\right) = 0.6\left(1 - \frac{0.89\ s}{5\ s}\right) = 0.4932$$

应用第一相末水击压强公式(13.36)：

$$\tau_1\sqrt{1 + \zeta_1^{1}} = \tau_0 - \frac{\zeta_1^{1}}{2\mu}$$

将 τ_0、τ_1、μ 等值代入得

$$0.4932\sqrt{1 + \zeta_1^{1}} = 0.6 - \frac{\zeta_1^{1}}{2 \times 1.203}$$

解得首相水击相对水击压强水头 $\zeta_1^{1} = 0.1636$，则最大水击压强水头

$$\Delta H_1^{1} = \zeta_1^{1} H_0 = 0\ 1636 \times 80\ m = 13.09\ m$$

最大水头

$$H_{max} = H_0 + \Delta H_1^{1} = 80\ m + 13.09\ m = 93.09\ m$$

第七节　调压系统非恒定流

当水电站引水管道较长，产生较大的水击压强时，常在管道中建造调压室，以减轻水击作用和降低水击压强。

调压室是一个设置在引水管道末端具有一定容积的井式建筑物，如图 13.14 所示。由于调压室具有自由表面，并能容纳一定的水体，它起着类似上游水库的作用，即当水击波从阀门处传至调压室时，大部分将被它反射回来，大大减轻了水击对调压室上游引水管道的作用。由于调压室代替水库的作用而成为管道的上边界，而且其位置常设在阀门上游附近，因而大大地缩短了水击波传播的距离，致使调压室反射回来的减压波很快返回到阀门，从而有效地削减了阀门处产生的最大水击压强。

因为调压室的容积比水库小得多，当发生水击时，室内水位不可能像水库水位一样保持不变，而发生上下波动现象。图 13.14

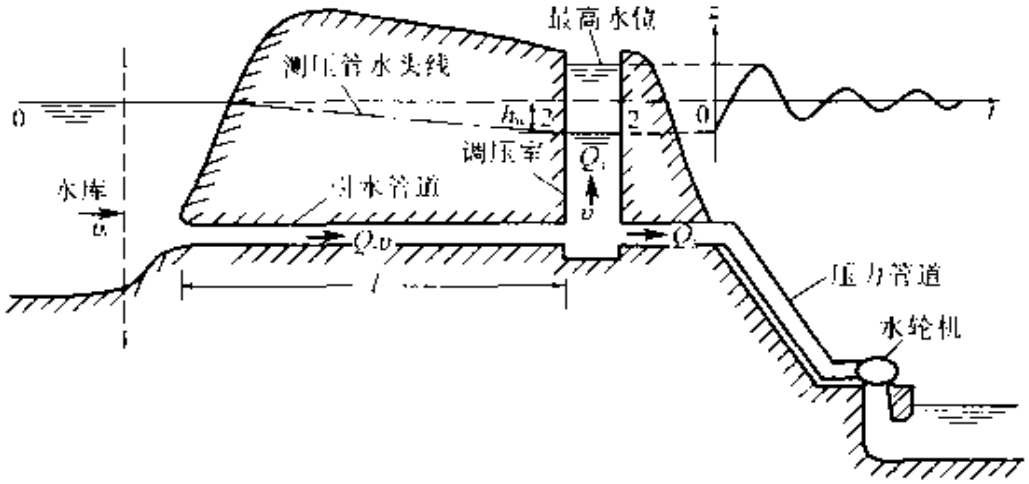


图 13.14

所示为形式最为简单的圆筒式调压室。恒定流时，调压室中维持某一固定水位，它比上游水位降低 h_w 值（h_w 为水库至调压室的水头损失）。当电站突然丢弃全部负荷，即阀门完全关闭时，压力管中的水流即停止流动，但调压室上游引水管中的水流在惯性作用下继续流向调压室，使室内水位上升。随着室内水位上升，水库与调压室之间的水位差逐渐减小，引水管中的流速亦相应减小。当室内水位升至与库水位齐平时，尽管水位差为零，但管中水流仍在惯性作用下继续流入调压室，直至室水位超出库水位某一高度时才停止上升，此时管中流速为零。但因此时室水位高于库水位，在重力作用下水将从调压室向水库作反向流动，室内水位下降。随着室水位的下降，管内反向流速逐渐减小。至室水位与库水位相平时，反向流动仍未停止。室水位仍继续下降，直至低于库水位某一数值时才停止下降。此后，在正向水位差作用下，水又开始向调压室流动，室内水位再次上升。这样就形成了调压室水位反复升降的波动现象。但因受摩阻力的影响，水位波动的振幅将随时间而减小，最终将稳定在库水位上。调压室水位 z 随时间 t 的波动图形示于图 13.14 中。如果阀门只是局部关闭，压力管道中尚有部分流量通过，则调压室仍存在水位波动现象，但最终的稳定水位

不是库水位，而是与该部分流量相应的恒定流的调压室水位。

当调压室水位波动时，水流在水库和调压室之间沿管道来回运动，其流速和压强均随时间不断变化，属于管道非恒定流。但因其压强变化不大，水体的压缩和管壁变形均可忽略，这是和计算水击问题的主要不同之处。

调压系统的水力计算主要是求解调压室水位的波动过程。下面先建立调压系统非恒定流基本方程——连续方程和能量方程。

设某一时刻通过引水管道的流量为 Q，进入调压室和压力管道的流量分别为 Q_1 和 Q_2。根据不可压缩液体管道一元非恒定流连续方程(13.12)：$Q = C(t)$，同一时刻通过管道各断面的流量等于常数，对于调压系统(属于分汊管道)，则同一时刻通过引水管道的流量应等于进入调压室和压力管道的流量之和，即

$$Q = Q_1 + Q_2$$

设引水管和调压室的断面面积分别为 A 及 A_1，流速分别为 v 及 v_1，则 $Q = vA$，$Q_1 = v_1 A_1$。代入上式得

$$v = \frac{1}{A}(v_1 A_1 + Q_2)$$

因调压室流速 $v_1 = \frac{dz}{dt}$，则上式写为

$$v = \frac{1}{A}\left(Q_2 + A_1 \frac{dz}{dt}\right) \tag{13.41}$$

上式为调压系统非恒定流连续方程。

在同一时刻，以水库水面 0－0 为基准面，对水库断面 1 和调压室水面 2 列出非恒定流能量方程(13.17)，可得

$$\frac{\alpha_0 v_0^2}{2g} = z + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} + h_w + h_i$$

因水库流速 v_0、调压室流速 v_1 与引水管流速 v 相比要小得多，可近似取 $\frac{\alpha_0 v_0^2}{2g} \approx 0$，$\frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} \approx 0$。对于等直径的简单引水管道，$\frac{\partial v}{\partial t}$ 沿管长 l 是不变的；如取 $\beta = 1$，则惯性水头

$$h_i = \frac{\beta}{g}\int_1^2 \frac{\partial v}{\partial t}\mathrm{d}s = \frac{1}{g}\frac{\partial v}{\partial t}\int_1^2 \mathrm{d}s = \frac{l}{g}\frac{\partial v}{\partial t}$$

代入能量方程得

$$z + h_w + \frac{l}{g}\frac{\partial v}{\partial t} = 0 \tag{13.42}$$

上式为调压系统非恒定流能量方程。

一般是将连续方程(13.41)和能量方程(13.42)改写为有限差分的形式,然后再求解调压室水位波动过程。现将方程中的$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$和$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$分别改为$\frac{\Delta z}{\Delta t}$和$\frac{\Delta v}{\Delta t}$,则式(13.41)和(13.42)分别改写为

$$\Delta z = (Av - Q_2)\frac{\Delta t}{A_1} \tag{13.43}$$

和

$$\Delta v = -\frac{g}{l}(z + h_w)\Delta t \tag{13.44}$$

以上二式为差分形式的调压系统非恒定流基本方程。式中 Δz 和 Δv 为相应于时段 Δt 的调压室水位增值和引水管流速增值。

应用式(13.43)和(13.44)求解调压室水位波动过程的步骤如下:

1. 设定计算时段 Δt:Δt 的长短应按要求的精度来确定,一般取 3s ~ 5s,最大不超过 10s。

2. 求 h_w 及 z_0:水库至调压室的水头损失 h_w 可按第四章的方法计算,即

$$h_w = \lambda\frac{l}{D}\frac{v^2}{2g} + \sum\zeta\frac{v^2}{2g}$$

进行第一时段计算时,式中流速 v 采用恒定流时引水管中的流速 v_0。

调压室初始水位为

$$z_0 = \text{库水位} - h_w = 0 - h_w = -h_w$$

3. 求 Δz_1 及 z_1:以 $v = v_0$ 及已知值 A、A_1、Q_2、Δt 代入式

(13.43)，可求出第一时段调压室水位增值 Δz_1。第一时段末调压室水位为

$$z_1 = z_0 + \Delta z_1$$

4. 求 Δv_1 及 v_1：以 $z = z_1$ 及已知值 l、h_w、Δt 代入式(13.44)，可求出第一时段引水管流速增值 Δv_1。第一时段末引水管流速为

$$v_1 = v_0 + \Delta v_1$$

5. 以 z_1 及 v_1 作为第二时段的初始水位和流速，重复以上步骤，可求出第二时段末的调压室水位 z_2 和引水管流速 v_2。

6. 同理求出各时段末的调压室水位和引水管流速，即可绘出调压室水位波动曲线($z \sim t$ 曲线)。

习　题

13.1　影响水击波速的因素有哪些？说明它们各自对水击波速的影响关系。

13.2　有1,2两根压力管道，除下列任一种条件不同外，其他条件均相同。当两管均发生直接水击时，在下列各种情况下两管的最大水击压强是否相等？如不等，哪一根大些？

(1)管径 $D_1 > D_2$；

(2)管壁厚度 $\delta_1 > \delta_2$；

(3)管壁弹性系数 $E_1 > E_2$；

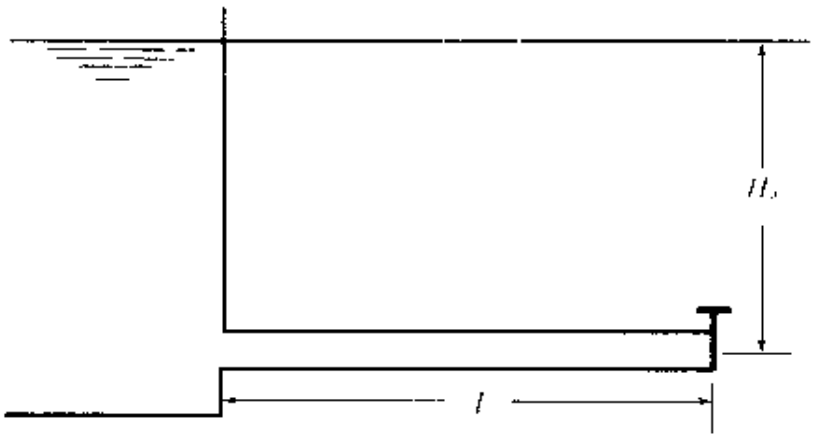
(4)管长 $l_1 > l_2$；

(5)阀门关闭时间 $T_{s_1} > T_{s_2}$；

(6)初始流速 $v_{01} > v_{02}$，终了流速 $v_1 > v_2$，但 $v_{01} - v_1 = v_{02} - v_2$。

13.3　压力管道的长度 $l = 1000$ m(题13.3图)。阀门全开时，管中流速 $v_0 = 2$ m/s，水头 $H_0 = 50$ m。水击波速 $c = 1000$ m/s。当阀门在1 s内按线性完全关闭(即流速按线性减小到零)，试分别绘出下列各时刻 t 沿管道的水击压强水头 ΔH 的分布图：(1)$t = 0.5$ s；(2)$t = 1$ s；(3)$t = 1.5$ s；(4)$t = 2$ s。(不计阻力影响)

13.4　按题13.3所给的条件，试绘出水击开始8 s内阀门断面压强 p 的过程图。(不计阻力影响)



题 13.3 图

13.5 某铸铁管直径 $D = 0.1$ m，管壁厚度 $\delta = 7$ mm，管中流速 $v_0 = 1.2$ m/s。若管道末端阀门瞬时完全关闭，求管中最大水击压强。如将铸铁管改为钢管，其他条件不变，则最大水击压强如何变化？

13.6 某电站引水钢管，管长 $l = 800$ m，管径 $D = 0.2$ m，水头 $H_0 = 100$ m，流速 $v_0 = 2.5$ m/s。钢材许可拉应力 $\sigma = 2.94$ kN/m^2。若完全关闭末端阀门的时间 $T_s = 1$ s，求管壁的设计厚度 δ。（提示：用试算法求解，先设水击波速 $c = 1000$ m/s。）

13.7 水电站压力钢管长度 $l = 450$ m，管径 $D = 0.6$ m，管壁厚度 $\delta = 0.02$ m。恒定流时，水头 $H_0 = 200$ m，流速 $v_0 = 3$ m/s。当管道末端阀门在 3 s 内从全开到完全关闭，求最大水击压强 Δp_{max}。

13.8 引水铸铁管长度 $l = 732$ m，直径 $D = 0.25$ m，管壁厚度 $\delta = 0.01$ m。恒定流时，水头 $H_0 = 36.5$ m，流速 $v_0 = 1.8$ m/s。若末端阀门从全开到全关的时间 $T_s = 5$ s，求管中发生的最大压强 p_{max}。

13.9 按题 13.8 的条件，计算阀门关闭时间 T_s 内各相末阀门处的水击压强 Δp，并绘出 Δp 与时间 t 的关系图。

第十四章　明渠非恒定流

第一节　概　述

明渠水流中，过水断面上的水力要素如流量、流速及水位等随时间不断变化的流动称为明渠非恒定流。例如，河流中因降雨形成的洪水过程，水库、湖泊因堤坝溃决引起的灾害性洪水过程和水库、湖泊内水体的突然泄放过程，渠道中因闸门调节而造成的上下游水位波动过程，以及入海口附近的潮汐现象等都是非恒定流动的典型例子。

研究明渠中非恒定流的运动规律及其计算方法具有重要的实际意义。例如，洪水演进计算是洪水预报、水库合理调度、堤防设计、蓄水分洪等的科学依据；溃坝洪水的计算结果是预估溃坝灾害、制定防洪规划的基本资料；水电站、泵站等水工建筑物上下游水位波动计算结果是上下游动力渠道设计的基础；感潮河段的潮汐水流计算结果则是河口整治、三角洲开发等规划研究的重要资料。

一、明渠非恒定流的特性

明渠非恒定流的基本特征是过水断面上的水力要素，如流速、流量、水位或水深、过水断面面积等，都是时间和空间的函数。对于一元明渠非恒定流，其运动规律可表示为

$$\begin{cases} v = v(s,t) \\ Q = Q(s,t) \\ z = z(s,t) \text{ 或 } h = h(s,t) \\ A = A(s,t) \end{cases}$$

式中 v、Q、z、h 和 A 分别表示过水断面上的平均流速、流量、水位、水深和过水断面面积；s、t 分别表示流程和时间。

明渠非恒定流是一种具有自由表面的波动现象。它与有压管路中的水击波不同。水击波是一种弹性波，起主要作用的力是惯性力和弹性力；而明渠非恒定流属于重力波范畴，起主要作用的力是重力、阻力和惯性力。在明渠非恒定流中，不但波形（非恒定流的瞬时水面线）向前传播，同时水质点也向前移动。实质上，非恒定流波动现象（如洪水波）的传播，是通过水质点的位移而实现的，这种波动称为位移波或运行波。位移波传播到某断面就使该断面的流量及水位（或流速及水深）发生变化。波传到之处，水面高出或低于原水面的空间称为波体，波体的前峰称为波峰，如图 14.1 所示。波锋推进的速度称为波速，以 c 表示。波峰顶点到原水面的高度称为波高，用 ζ 表示。图中 v 表示断面平均流速。

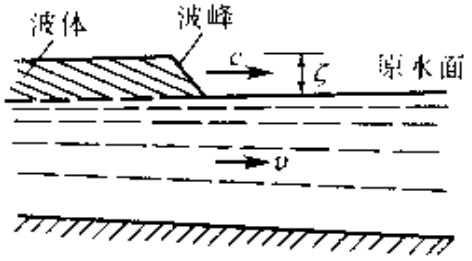


图 14.1

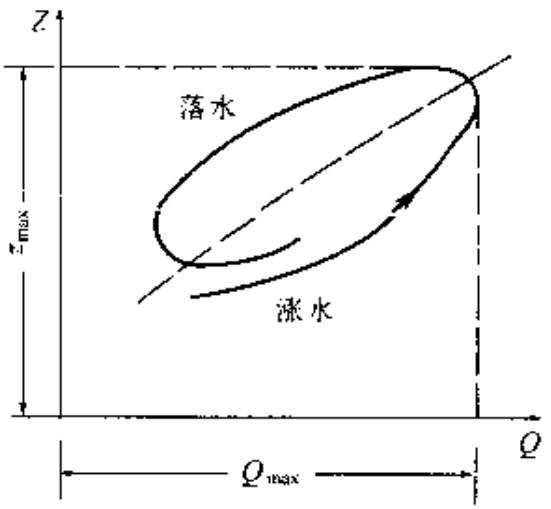


图 14.2

明渠非恒定流中，过水断面上的水位-流量关系呈多值关系。在明渠恒定流时，由于水面坡度不随时间变化，故断面上的水位－流量关系呈单值关系，即一个水位对应一个固定的流量，如图 14.2 中虚线所示。但是在非恒定流时，则复杂得多。由于涨水过程中，一般总是上游先涨水，同一水位下非恒定流的水面坡度比恒定流时的大，因而流量也大；而落水过程中，一般总是上

游先退水，在同一水位下非恒定流的水面坡度比恒定流时小，因而流量也小。这样，在同一水位下明渠断面上的水位与流量之间呈现多值关系，即一个水位可对应几个流量，如图 14.2 所示的逆时针绳套曲线。上面讨论的是明渠没有冲淤的情况，在有冲淤变化的明渠非恒定流中，由于河道断面形态、糙率等还将随着河道的冲淤变化而变化，其水位流量关系将呈现出更为复杂的关系。一般情况下，若涨水时冲刷多，而落水时淤积少，则水位流量关系呈现顺时向绳套曲线；若涨水时冲刷少，而落水时淤积多，则水位流量关系呈现逆时向绳套曲线。若明渠非恒定流中，水位沿程变化和速度随时间变化相对于比降来说均很小而可略去，此时水位流量关系可近似按单值关系处理。

此外，明渠非恒定流的波动属于浅水波或长波。在非恒定流动中，如水深与波长之比小于 1/20，则整个断面上的水体都能受到扰动，这种水波称为浅水波或长波。许多明渠非恒定流一般都能满足这一条件，故明渠非恒定流属于浅水波或长波。分析这种波动必须计入阻力影响，运动方程常为非线性偏微分方程，通常难以得到解析解，数值解在这类问题中占有十分重要的地位。

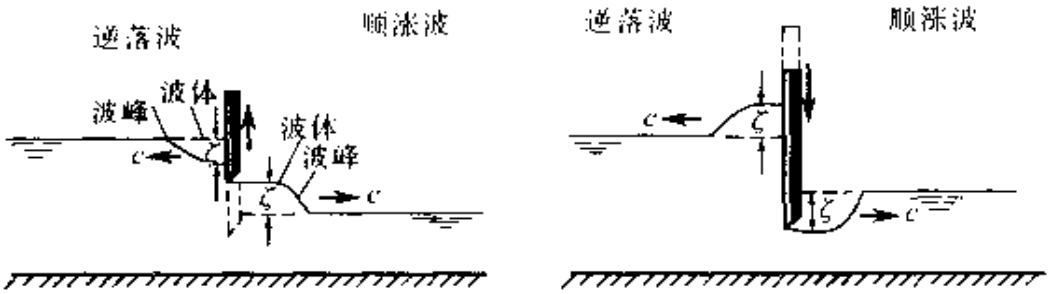
二、位移波的分类

依据明渠非恒定流波动所及区域的水力要素随时间变化的急剧程度不同，可以将位移波分为连续波和不连续波。当波动过程发生比较缓慢，其瞬时水面线的坡度很缓，瞬时流线几乎是平行直线，可以认为压强沿垂线按静水压强分布，水力要素是时间和流程的连续函数，这种非恒定流波动具有渐变的性质，称为连续波（即非恒定渐变流），如河流中的洪水波即属于此类。当波动过程发生很迅速，水深和流量变化剧烈，波峰处水面坡度很陡，甚至具有阶梯的形状，水力要素不再是时间和流程的连续函数，这种非恒定流波动具有突变的性质，这样的波就称为不连续波（即非恒定急变流），如溃坝波、动力渠道中的断波等。

按波传到之处水面涨落的情况，可分为涨水波和落水波。位移波传播过程中，如果造成水面上涨，则称为涨水波或正波，反之称为落水波或负波。

按波的传播方向来分，顺水流方向传播的波称为顺水波，逆水流传播的称为逆水波。

例如，渠道上闸门迅速开启，如图 14.3(a)所示，在闸门的上下游将产生非恒定急变流——不连续波。下游因流量骤然增加，水位迅速上升而形成顺涨波(顺水涨水波)；上游则因水体突然泄出，水位迅速下降而形成逆落波(逆水落水波)。反之，当闸门迅速关闭，如图 14.3(b)所示，闸门下游形成顺落波(顺水落水波)，而闸门上游形成逆涨波(逆水涨水波)。



(a) 闸门迅速开启　　(b) 闸门迅速关闭

图 14.3

第二节　明渠非恒定渐变流的基本方程——圣维南方程组

明渠非恒定渐变流的基本方程——圣维南方程组是表征明渠非恒定渐变流断面水力要素随时间和空间变化的函数关系式，它由非恒定流连续方程和运动方程所组成。实际明渠非恒定渐变流的流场可以是一元、二元或三元的，这里仅讨论一元的情况，即仅考虑断面平均水力要素随时间和流程的变化关系。

一、明渠非恒定流的连续方程

现从明渠非恒定流中取长为 ds 的微小流段来分析，根据质量守恒定律，建立有侧向汇流的明渠非恒定流连续方程：

如图 14.4 所示的微小流段 ds 上，假设时刻 t 的水面为 $a-a$，单位时间内从断面 1 进入微段的瞬时质量为 ρQ，沿两岸汇入明渠的流量为 $q_L\mathrm{d}s$（q_L 为单位长度上的侧向汇流流量，汇入流量取正号，出流流量取负号），同时，单位时间内从断面 2 流出的瞬时质量为 $(\rho+\frac{\partial\rho}{\partial s}\mathrm{d}s)(Q+\frac{\partial Q}{\partial s}\mathrm{d}s)$。若将断面

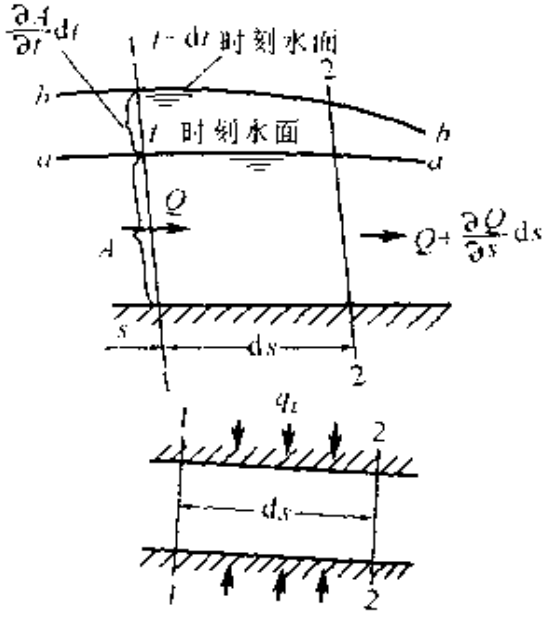


图 14.4

1、2 和微段侧壁当作控制体表面，则在 $\mathrm{d}t$ 时段内，流入与流出控制体的水体质量差为

$$[(\rho Q+\rho q_L\mathrm{d}s)-(\rho+\frac{\partial\rho}{\partial s}\mathrm{d}s)(Q+\frac{\partial Q}{\partial s}\mathrm{d}s)]\mathrm{d}t$$

如果流入的质量比流出的多，则控制体内水体质量将增加，其增量为

$$(\rho+\frac{\partial\rho}{\partial t}\mathrm{d}t)(A+\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial s}\mathrm{d}s)+\frac{\partial}{\partial t}(A+\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial s}\mathrm{d}s)\mathrm{d}t]\mathrm{d}s$$

$$-\rho(A+\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial s}\mathrm{d}s)\mathrm{d}s$$

根据质量守恒定律，可令 $\mathrm{d}t$ 时段内流入与流出控制体的水体质量差等于时段内控制体内的质量增量，并考虑到对于明渠非恒定流动，水的压缩性可以忽略，即 $\frac{\partial\rho}{\partial t}=\frac{\partial\rho}{\partial s}=0$，经整理并忽略高阶微量

后可得

$$\frac{\partial Q}{\partial s} + \frac{\partial A}{\partial t} = q_L \tag{14.1}$$

上式就是有侧向汇流的明渠非恒定流连续方程。它适用于任意断面形状的明渠。该式说明在明渠非恒定流中，流量沿程的变化率与过水断面面积随时间的变化率之和等于单位长度上的侧向汇流流量。

当无侧向汇流时，即 $q_L = 0$，则由式(14.1)可得

$$\frac{\partial Q}{\partial s} + \frac{\partial A}{\partial t} = 0 \tag{14.2}$$

上式表明在明渠非恒定流的微小流段上，流量沿流程的变化率与过水断面面积随时间的变化率绝对值相等，符号相反。若$\frac{\partial Q}{\partial s} > 0$，必然$\frac{\partial A}{\partial t} < 0$，说明在微小流段上流出流量大于流入流量，微段水位随时间下降，明渠中产生落水波；反之，若$\frac{\partial Q}{\partial s} < 0$，则$\frac{\partial A}{\partial t} > 0$，明渠中产生涨水波。若$\frac{\partial Q}{\partial s} = 0$，则$\frac{\partial A}{\partial t} = 0$，这种情况只有在明渠恒定流中才会发生。

利用$\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{\partial A}{\partial h}\frac{\partial h}{\partial t} = B\frac{\partial h}{\partial t} = B\frac{\partial z}{\partial t}$，则式(14.2)可改写成

$$\frac{\partial Q}{\partial s} + B\frac{\partial z}{\partial t} = 0 \tag{14.3}$$

对于宽度为 B 的矩形断面明渠，利用 $A = Bh$、$Q = qB$（q 为单宽流量），代入式(14.2)可得矩形明渠非恒定流连续方程为

$$\frac{\partial q}{\partial s} + \frac{\partial h}{\partial t} = 0$$

以 $q = vh$ 代入上式得

$$\frac{\partial h}{\partial t} + v\frac{\partial h}{\partial s} + h\frac{\partial v}{\partial s} = 0 \tag{14.4}$$

式(14.1)、(14.2)、(14.3)、(14.4)是明渠非恒定流连续方程的几种

不同形式。

二、明渠非恒定渐变流的运动方程

在明渠非恒定渐变总流中，取长为 ds 的微小流段来分析，利用牛顿第二定律，建立明渠非恒定渐变流的运动方程。为分析简单起见，先考虑棱柱体明渠的情况。如图 14.5(a)所示，假设断面 1 处的水力要素为 Q、v、A、h 和 z，则断面 2 处的水力要素可相应的表示为 $Q+\frac{\partial Q}{\partial s}ds$、$v+\frac{\partial v}{\partial s}ds$、$A+\frac{\partial A}{\partial s}ds$、$h+\frac{\partial h}{\partial s}ds$ 和 $z+\frac{\partial z}{\partial s}ds$。

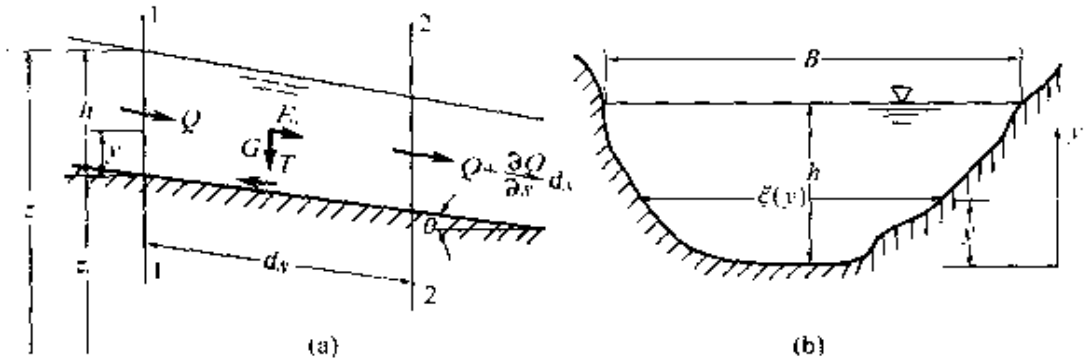


图 14.5

作用在微小流段 ds 上的力有重力、压力和阻力三种，这些力都应分解为沿流程 s 方向的分力。重力在 s 方向上的分量为

$$F_G = \rho g A ds \sin\theta = \rho g A i ds$$

式中，θ 是底坡线与水平线的夹角，假定 θ 很小，则 $\sin\theta \approx \tan\theta = i$，$i$ 是明渠底坡。

作用于微小流段断面 1 上的压力为(如图 14.5(b)所示)

$$P = \int_0^h \rho g(h-y)\xi(y)dy$$

式中，$\xi(y)$是过水断面上渠底以上高度 y 处的水面宽度。沿 s 方向的总压力为

$$\Sigma P = P - \left(P + \frac{\partial P}{\partial s}ds\right)$$

$$= -\frac{\partial}{\partial s}\left[\int_0^h \rho g(h-y)\xi(y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}s$$

$$= -\rho g\mathrm{d}s\int_0^h \frac{\partial}{\partial s}[(h-y)\xi(y)]\mathrm{d}y$$

$$= -\rho g\mathrm{d}s\left[\frac{\partial h}{\partial s}\int_0^h \xi(y)\mathrm{d}y + \int_0^h (h-y)\frac{\partial \xi(y)}{\partial s}\mathrm{d}y\right] \quad (14.5)$$

上式右端第一项积分为过水断面面积，第二项积分中$\frac{\partial \xi(y)}{\partial s}$，因假定棱柱体明渠，其值为零，则

$$\Sigma P = -\rho g A\frac{\partial h}{\partial s}\mathrm{d}s$$

阻力由明渠底部及两侧的剪切力所组成，假定平均水力坡度为 J，则作用于微段 $\mathrm{d}s$ 上的阻力为

$$T = \rho g A J\mathrm{d}s$$

若假定断面上流速分布均匀，则该微段的加速度在 s 方向上的分量为

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial s}$$

由牛顿第二定律可得

$$F_G + \Sigma P - T = ma$$

将以上各项代入得

$$\rho g A i\mathrm{d}s - \rho g A\frac{\partial h}{\partial s}\mathrm{d}s - \rho g A J\mathrm{d}s = \rho A\mathrm{d}s\left(\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial s}\right)$$

整理得

$$i - \frac{\partial h}{\partial s} = \frac{1}{g}\left(\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial s}\right) + J \quad (14.6)$$

上式就是棱柱体明渠非恒定渐变流的运动方程。对于非棱柱体明渠如河槽向下游缩窄或展宽，则两岸壁将对微段水体作用一附加压力，该附加压力可表示为

$$\Delta P' = \int_0^h \left[\rho g(h-y)\frac{\partial \xi(y)}{\partial s}\mathrm{d}s\right]\mathrm{d}y$$

将附加压力代入式(14.5)中，恰好与该式最后一项相抵消，因此对于非棱柱体明渠，仍能应用式(14.6)。

与明渠恒定渐变流运动方程相比，式(14.6)中多出了一项$\frac{1}{g}\frac{\partial v}{\partial t}$，它表示明渠非恒定流动为了克服当地加速度引起的惯性在单位流程上必须转移的单位动能。$\frac{\partial v}{\partial t}>0$时，这部分能量为水流所蕴蓄；$\frac{\partial v}{\partial t}<0$时，这部分能量从水流中释放出来。

对于非恒定流动中的水力坡度 J 的规律，假定与恒定流时的水力坡度变化规律相同，应用谢才公式 $J=\frac{v^2}{C^2R}$(其中 C 是谢才系数，R 是水力半径)，代入式(14.6)可得

$$i-\frac{\partial h}{\partial s}=\frac{1}{g}\left(\frac{\partial v}{\partial t}+v\frac{\partial v}{\partial s}\right)+\frac{v^2}{C^2R} \tag{14.7}$$

由于在任意过水断面上，水位 z、水深 h 和渠底高程 z_0 之间存在关系 $z=z_0+h$，则有

$$\frac{\partial z}{\partial s}=\frac{\partial z_0}{\partial s}+\frac{\partial h}{\partial s}=-i+\frac{\partial h}{\partial s}$$

代入式(14.7)中可得

$$-\frac{\partial z}{\partial s}=\frac{1}{g}\left(\frac{\partial v}{\partial t}+v\frac{\partial v}{\partial s}\right)+\frac{v^2}{C^2R} \tag{14.8}$$

若利用 $v=\frac{Q}{A}$和$K=AC\sqrt{R}$，并注意到连续方程$\frac{\partial Q}{\partial s}=-\frac{\partial A}{\partial t}$，代入式(14.8)，整理可得

$$\frac{\partial Q}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{Q^2}{A}\right)+gA\frac{\partial z}{\partial s}+gA\frac{Q^2}{K^2}=0 \tag{14.9}$$

式(14.7)、(14.8)和(14.9)是明渠非恒定渐变流运动方程的几种不同形式。在给定的初始条件和边界条件下，联解式(14.4)和式(14.7)，就可得到非恒定流的流速和水深随时间和流程的变化关系，即 $v(s,t)$和 $h(s,t)$。圣维南方程组也可由式(14.3)和

(14.9)组成，求解流量 $Q(s,t)$ 和水面高程 $z(s,t)$，这种情况常为求解天然河道的非恒定流动问题所用。

三、明渠非恒定渐变流动解法简介

圣维南方程组属于一阶拟线性双曲型偏微分方程组，目前还无法求得其精确解析解，因而实践中常采用近似的计算方法。这些计算方法大致可归纳为以下几种：

一是特征线法。这一方法是根据偏微分方程理论，先将基本方程组变换为特征线的常微分方程组，然后对该常微分方程进行离散化，再结合初始条件和边界条件求数值解或图解。这种方法物理概念明确，数学分析严谨，计算结果精度较高。

二是直接差分法。此法是将基本方程组直接离散化，进而联解由此得到的一组代数方程组。依据离散化时采用的数值格式不同，可以将直接差分法分为显式差分法和隐式差分法两种。显式差分法是根据前一时刻的已知值逐点分别求解下一时刻未知值，计算过程简单。隐式差分法不能直接由前一时刻的值求解下一时刻的值，必须同时对所有节点列出差分方程而求解大型代数方程组，计算较为复杂。直接差分法是目前工程中求解明渠非恒定渐变流动的常用方法。

三是瞬时流态法，简称瞬态法。此法一般将运动方程中的所有惯性项忽略，从而使基本方程组简化为一阶非线性抛物型方程组，然后对简化方程离散化，再结合边界条件和初始条件，近似计算指定时刻各断面的水力要素。瞬态法应用较早，是一个比较成熟、有效的计算方法，但因其过于简化，精度往往不能满足实际需要，现已被上述两种方法所替代。

四是微幅波理论法。其基本论点是假定由于波动引起的各种水力要素的变化都是微小量，它们的乘积或平方都可忽略。这样将拟线性偏微分方程化为一阶线性常微分方程，然后求得解析解。这种方法适用于波高很小，波长很大的情况，如水电站日调节时引

水渠中的波动、弱潮河口的潮波运动等。

除以上介绍的几种方法外，还有其他一些方法。例如，将运动方程简化为出流量与河段槽蓄量单一函数关系的经验槽蓄曲线方法；把入流看作输入，出流看作输出，把河段看作线性变换系统的单位线法；近年来随着电子计算机的广泛运用，又提出了有限单元法等。

本章将着重介绍特征线法和直接差分法。无论采用哪种计算方法，都必须结合水流的初始条件和边界条件进行，因此，下面首先讨论初始条件和边界条件。

四、初始条件和界条件

1. 初始条件

初始条件通常是指非恒定流起始时刻的水流条件。一般情况下，初始条件可以是非恒定流过程中，人们需要着手开始计算的任何指定时刻的水流条件。因此，明渠非恒定流的初始条件可以表示为某一初始时刻 t_0 时，所研究河段各断面的水位(或水深)和流量(或流速)，即

$$\begin{cases} z_{t=t_0} = z(s) \\ Q_{t=t_0} = Q(s) \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} h_{t=t_0} = h(s) \\ v_{t=t_0} = v(s) \end{cases} \tag{14.10}$$

2. 边界条件

边界条件是指非恒定流发生过程中，河渠两端断面应满足的水力条件。边界条件分为上游边界条件和下游边界条件。

上游边界条件是非恒定流发生过程中，渠首断面应满足的水力条件。它常以渠首断面的流量过程线或水位过程线来表示：

$$Q_{s=0} = Q(t) \quad \text{或} \quad z_{s=0} = z(t) \tag{14.11}$$

例如洪水波、溃坝波、水电站调节波等，上游边界条件通常都用流量过程线表示。图 14.6 为单一洪峰形成的非恒定流量过程线，图 14.7 为水坝瞬时全部溃坝造成的洪水过程线。

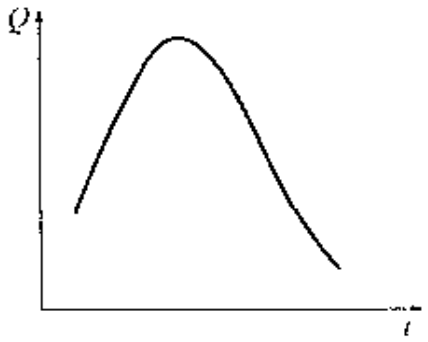


图 14.6

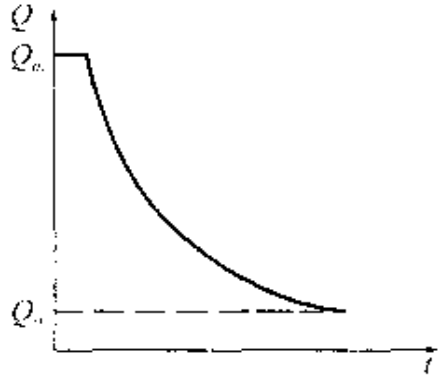


图 14.7

下游边界条件是非恒定流发生过程中，渠尾断面应满足的水力条件。一般以渠尾断面的水位流量关系来表示

$$z_{s=l} = z(Q) \tag{14.12}$$

如在洪水演算中常以渠尾断面恒定流时的水位流量作为下游边界条件。下游边界条件有时也可用某一固定水位表示，即

$$z_{s=l} = C(\text{常数}) \tag{14.13}$$

例如明渠末端是大型水库或湖泊，则常以水库或湖泊水位表示。

第三节　特征线法

特征线法是数学上用来对拟线性双曲型偏微分方程进行求解的一种方法。一元明渠非恒定渐变流基本方程属于拟线性双曲型偏微分方程。根据偏微分方程理论，在一定条件下存在两簇特征线，沿特征线可以把偏微分方程化为常微分方程（特征方程）进行求解。本节说明如何将一元非恒定渐变流基本方程组转化为特征方程，并介绍其物理意义、定解条件及求解方法。

一、特征方程及其物理意义

对于矩形断面明渠无侧向汇流的情况，将式(14.7)稍作整理后，非恒定渐变流基本方程组可表示为

$$\frac{\partial h}{\partial t} + v\frac{\partial h}{\partial s} + h\frac{\partial v}{\partial s} = 0 \tag{14.4}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial s} + g\frac{\partial h}{\partial s} = g\left(i - \frac{v^2}{C^2R}\right) \tag{14.14}$$

通过线性组合，可将式(14.4)和式(14.14)转化为常微分方程。由于式(14.4)中各项的量纲为 LT^{-1}，式(14.14)中各项的量纲为 LT^{-2}，因此在线性组合时，若以 φ 乘以式(14.4)再与式(14.14)相加，则 φ 的量纲应为 T^{-1}，组合的结果为

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v + \varphi h)\frac{\partial v}{\partial s} + \varphi\left[\frac{\partial h}{\partial t} + \left(v + \frac{g}{\varphi}\right)\frac{\partial h}{\partial s}\right] = g\left(i - \frac{v^2}{C^2R}\right) \tag{14.15}$$

如果存在如下关系式

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + (v + \varphi h)\frac{\partial v}{\partial s} &= \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\partial h}{\partial t} + \left(v + \frac{g}{\varphi}\right)\frac{\partial h}{\partial s} &= \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} \end{aligned}\right\} \tag{14.16}$$

则应要求

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = v + \varphi h = v + \frac{g}{\varphi} = c \tag{14.17}$$

解式(14.17)得：$\varphi = \pm\sqrt{\frac{g}{h}}$，将 φ 再代入式(14.17)可得

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = v + \sqrt{gh} = c^+ & (14.18) \\ \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = v - \sqrt{gh} = c^- & (14.19) \end{cases}$$

上两式表明，在明渠非恒定流自变量域 s-t 平面上，存在两簇曲线：一簇由式(14.18)确定，称为顺特征线，以 c^+ 表示；另一簇由方程式(14.19)确定，称为逆特征线，以 c^- 表示。很明显，在自变量域 s-t 平面上的任意点，都有两条特征线经过，沿顺特征线的切线方向称为顺特征方向，沿逆特征线的切线方向称为逆特征方向。式(14.18)、式(14.19)分别称为顺、逆特征线方程。在特征线上，方程(14.15)可转化为如下关系

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \pm \sqrt{\frac{g}{h}} \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = g\left(i - \frac{v^2}{C^2 R}\right)$$

或写成

$$\mathrm{d}\left(v \pm 2\sqrt{gh}\right) = g\left(i - \frac{v^2}{C^2 R}\right)\mathrm{d}t \tag{14.20}$$

式(14.20)确定了 s-t 平面上任意点(s, t)的水力要素 v 与 h 沿特征线的变化规律,简称特征关系或特征方程。

沿顺特征线的变化规律为

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = v + \sqrt{gh} & (14.21) \\ \mathrm{d}\left(v + 2\sqrt{gh}\right) = g\left(i - \dfrac{v^2}{C^2 R}\right)\mathrm{d}t & (14.22) \end{cases}$$

沿逆特征线的变化规律为

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = v - \sqrt{gh} & (14.23) \\ \mathrm{d}\left(v - 2\sqrt{gh}\right) = g\left(i - \dfrac{v^2}{C^2 R}\right)\mathrm{d}t & (14.24) \end{cases}$$

这样就把原来的两个偏微分方程转化为上述两对常微分方程组。

下面讨论明渠非恒定流不同流态时特征线的几何特征,然后介绍特征线方程及特征方程的物理意义。就矩形明渠而言,在缓流中 $Fr = v/\sqrt{gh} < 1$,即 $v < \sqrt{gh}$。此时$\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = v + \sqrt{gh} > 0$,即顺特征线具有正的斜率,因此在 s-t 平面上,随着时间的推移,顺特征线指向下游,如图 14.8(a)所示;而$\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = v - \sqrt{gh} < 0$,即逆特征线具有负的斜率,这样在 s-t 平面上,随着时间的推移,逆特征线必然指向上游。在急流中,由于 $v > \sqrt{gh}$,顺、逆特征线斜率都大于零,因此,通过任意点的两条特征线随时间推移都指向下游,如图 14.8(b)所示。

实际上,在矩形明渠中,微干扰波的相对波速为$\sqrt{gh}$,$(v + \sqrt{gh})$和$(v - \sqrt{gh})$分别为干扰波向下游和向上游传播的绝对波

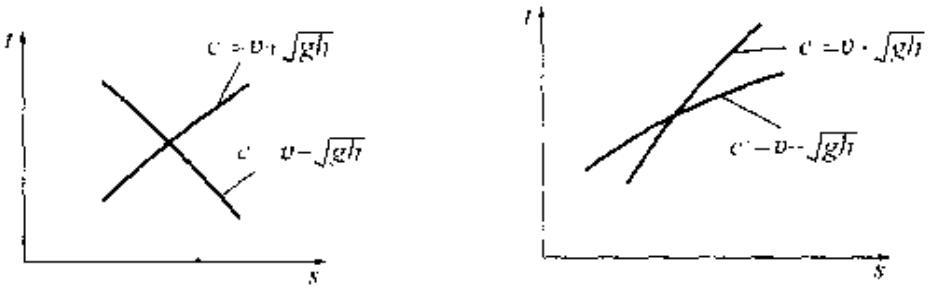


图 14.8

速。可见，就 s-t 平面上的某一点而言，特征线方程(14.21)和(14.23)分别表示明渠非恒定流动从该断面该时刻出发，沿特征线切线方向向下游和向上游传播的微干扰波的传播速度。特征线可以看成是微干扰波的轨迹线。在缓流中干扰波可向上、下游两个方向传播，因而一簇特征线指向上游，另一簇指向下游。在急流中，干扰波不能向上游传播，只能向下游传播，因此，两簇特征线均指向下游。明渠非恒定流任意断面水力要素的变化都会以干扰波的形式向上游或向下游传播，从而影响其他断面水力要素。干扰波从一个断面经 $\mathrm{d}t$ 时间传到另一个断面时，这两个断面水力要素间存在的关系则由特征方程(14.22)和(14.24)所确定。

以上是以矩形明渠为例进行讨论的，对于非矩形明渠，通常以式(14.2)和式(14.8)为基础，通过类似的方法可得到如下特征线方程和特征方程：

沿顺特征线方向

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = v + \sqrt{g\dfrac{A}{B}}, \\ \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \sqrt{\dfrac{g}{AB}}\dfrac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = g\left(i - \dfrac{v^2}{C^2R}\right) \end{cases} \tag{14.25}$$

沿逆特征线方向

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = v - \sqrt{g\dfrac{A}{B}}, \\ \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} - \sqrt{\dfrac{g}{AB}}\dfrac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = g\left(i - \dfrac{v^2}{C^2R}\right) \end{cases} \tag{14.26}$$

在一般情况下，对特征线的常微分方程求解析解有很大困难，下面介绍在实际中常用的有限差分解法。

二、特征差分方程及其定解条件

在特征方程组中，以有限差商代替导数，就可将特征微分方程组改写成特征差分方程组。以矩形明渠非恒定流特征方程组(14.21)、(14.22)、(14.23)、(14.24)为例，将其改写成如下形式的差分方程组：

顺特征差分方程

$$\begin{cases} \dfrac{\Delta s}{\Delta t} = v + \sqrt{g\bar{h}} & (14.27) \\ \Delta\left(v + 2\sqrt{g\bar{h}}\right) = g\left(i - \dfrac{v^2}{C^2R}\right)\Delta t & (14.28) \end{cases}$$

逆特征差分方程

$$\begin{cases} \dfrac{\Delta s}{\Delta t} = v - \sqrt{g\bar{h}} & (14.29) \\ \Delta\left(v - 2\sqrt{g\bar{h}}\right) = g\left(i - \dfrac{v^2}{C^2R}\right)\Delta t & (14.30) \end{cases}$$

下面讨论具体求解方法。

对于不在边界上的内结点，如图 14.9 所示，计算过程如下。已知 a、b 两点的位置(s_a, t_a)、(s_b, t_b)，以及这两点的水力要素 v_a、h_a 和 v_b、h_b，由 a、b 两点出发所作的特征线的交点为 e，求解 e 点的位置(s_e, t_e)及水力要素 v_e、h_e 的值。e 点的位置可根据差分方程式(14.27)和(14.29)求解。因 ae 是顺特征线，a、e 两点的值应满足式(14.27)；而 be 是逆特征线，b、e 两点的值应满足式(14.29)。据此，将 a、b、e 三点的值代入后可得

$$\begin{cases} \dfrac{s_e - s_a}{t_e - t_a} = v_a + \sqrt{gh_a} \\ \dfrac{s_e - s_b}{t_e - t_b} = v_b - \sqrt{gh_b} \end{cases}$$

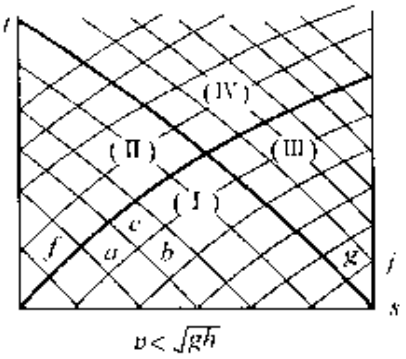


图 14.9

由此方程可解出 e 点的位置(s_e, t_e)。e 点的位置已知后，再利用式(14.28)和式(14.30)，将 a、b、c 三点的值代入后得

$$\begin{cases} v_e + 2\sqrt{gh_e} = v_a + 2\sqrt{gh_a} + g\left(i - \dfrac{v_a^2}{C_a^2 R_a}\right)(t_e - t_a) \\ v_e - 2\sqrt{gh_e} = v_b - 2\sqrt{gh_b} + g\left(i - \dfrac{v_b^2}{C_b^2 R_b}\right)(t_e - t_b) \end{cases}$$

联解此方程组便可得 e 点的水力要素 v_e、h_e 的值。以上解出的 e 点的位置和水力要素是第一次近似值，依据同样的方法可以得到第二次近似值，计算方程如下

$$\begin{cases} \dfrac{s_e - s_a}{t_e - t_a} = \dfrac{v_a + v_e}{2} + \dfrac{\sqrt{gh_a} + \sqrt{gh_e}}{2}, \\ \dfrac{s_e - s_b}{t_e - t_b} = \dfrac{v_b + v_e}{2} - \dfrac{\sqrt{gh_b} + \sqrt{gh_e}}{2} \end{cases} \tag{14.31}$$

$$\begin{cases} v_e + 2\sqrt{gh_e} = v_a + 2\sqrt{gh_a} + g\left[i - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{v_a^2}{C_a^2 R_a} + \dfrac{v_e^2}{C_e^2 R_e}\right)\right](t_e - t_a), \\ v_e - 2\sqrt{gh_e} = v_b - 2\sqrt{gh_b} + g\left[i - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{v_b^2}{C_b^2 R_b} + \dfrac{v_e^2}{C_e^2 R_e}\right)\right](t_e - t_b) \end{cases} \tag{14.32}$$

将 v_e、h_e 的第一次近似值代入式(14.31)，可得出 s_e、t_e 的第二次

近似值，再代入式(14.32)(等号右边的 v_e、h_e 用第一次近似值代入)后可解出 v_e、h_e 的第二次近似值。这样经过若干次迭代修正，就可得到满足精度要求的 s_e、t_e、v_e 和 h_e 值。

边界点的求解方法。如图 14.9 所示，从 f 或 g 点出发可作逆、顺特征线与上、下游边界分别交于 i、j。与内结点的解法相似，沿特征线 fi 和 gj 上可写出下列特征差分方程。

沿 fi：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{s_i - s_f}{t_i - t_f} = v_f - \sqrt{gh_f},\\&v_i - 2\sqrt{gh_i} = v_f - 2\sqrt{gh_f} + g\left(i - \frac{v_f^2}{C_f^2 R_f}\right)(t_i - t_f)\end{aligned}\right\} \tag{14.33a}$$

沿 fj：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{s_j - s_g}{t_j - t_g} = v_g + \sqrt{gh_g},\\&v_j + 2\sqrt{gh_j} = v_g + 2\sqrt{gh_g} + g\left(i - \frac{v_g^2}{C_g^2 R_g}\right)(t_j - t_g)\end{aligned}\right\} \tag{14.33b}$$

由于 i、j 点各有三个未知数，所以除了上列方程外，还各自需要一个方程才能求解，这个方程就是边界条件。因此，为了使非恒定流问题得到定解，就必须给出上、下游边界条件。利用边界条件方程〔如式(14.11)和式(14.12)〕，与式(14.33)联解，就可得出边界点 i、j 的位置及水力要素的值。

综上所述，由初始条件出发加上边界条件，可以把 s-t 平面上特征线网格点上的未知值解出来。一般说来，断面间距取得越小，网格愈密，精度也愈高，但计算工作量和费用会相应增加。

在特征线网格中有两条特征线具有特殊意义，如图 14.9 所示，它们将 s-t 平面分成了四个区：(Ⅰ)区只受初始条件控制，不依赖上下游边界条件，给定 $v(s,0)$和 $h(s,0)$这两个初始条件后，

本区内任何点都可解出；(Ⅱ)区受初始条件和上边界条件控制，除了初始条件外，还要给定一个上游边界条件才能定解；(Ⅲ)区的解由初始条件和下游边界条件才能定解；(Ⅳ)区则与初始条件及上下游边界条件都有关，但初始条件的影响相对小的多。以上讨论的是水流为缓流的情况。当水流为急流时，为了定解，需给出初始条件和两个上游边界条件。如图 *14.10* 所示，在 *s-t* 平面上特征线网可分为三个区：(Ⅰ)区只受初始条件控制；(Ⅱ)区只受上游边界条件控制；(Ⅲ)区则同时受初始条件和上游边界条件控制。急流中干扰波不能向上游传播，因此，急流情况下，下游边界条件对非恒定流的解没有影响。了解这些特性，对于实际计算中边界条件的取定以及计算精度的提高，有重要意义。

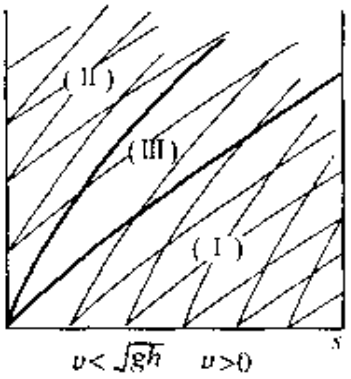


图 14.10

例 14.1　有一矩形棱柱体明渠，原渠中水流为恒定均匀流，底坡平缓，其均匀流水深为 $h_0=4$ m，断面平均流速 $v=0.9$ m/s，渠道末端与水库相连，库水位与渠水位一致，如图 14.11 所示。从某时刻开始，水库水位以每小时 1m 的速度均匀下降。假设忽略渠道底坡和阻力的影响，试用特征线法求：(1)若断面 A 距渠道末端断面 0 的距离为 $s_A=2$ km，问断面 A 处水位下降 1.8 m 所需的时间；(2)若此时，渠道中断面 B 处水位开始下降，问断面 B 至渠道末端的距离 s_B 是多少？

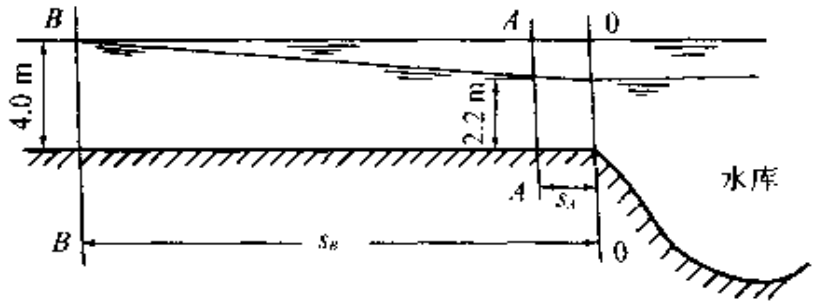


图 14.11

解： 以渠道末端为起始断面($s=0$)，向上游为 s 的正方向。因初始时刻为恒定均匀流，渠道中各断面都满足以下关系：

$$v_0 = -0.9\ \text{m/s},$$

$$c = \sqrt{gh_0} = \sqrt{9.81\ \text{ms}^{-2} \times 4\ \text{m}} = 6.26\ \text{m/s},$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)_{t=0} = v_0 + c = -0.9\ \text{ms}^{-1} + 6.26\ \text{ms}^{-1} = 5.36\ \text{m/s}$$

根据以上数据可以在 s-t 平面上过 s 轴各点，绘制斜率相同的顺特征线，现仅于渠道末端($s=0$)断面作顺特征线 OM，见图 14.12。在图 14.11 上可以看出：$s_A = 2000$ m，$h_A = 4\ \text{m} - 1.8\ \text{m} = 2.2$ m，$\sqrt{gh_A} = \sqrt{9.81\text{ms}^{-1} \times 2.2\ \text{m}} = 4.65$ m/s。

要求在 s-t 平面(图 14.12)上确定 A 点的位置，即求 $t_A = ?$

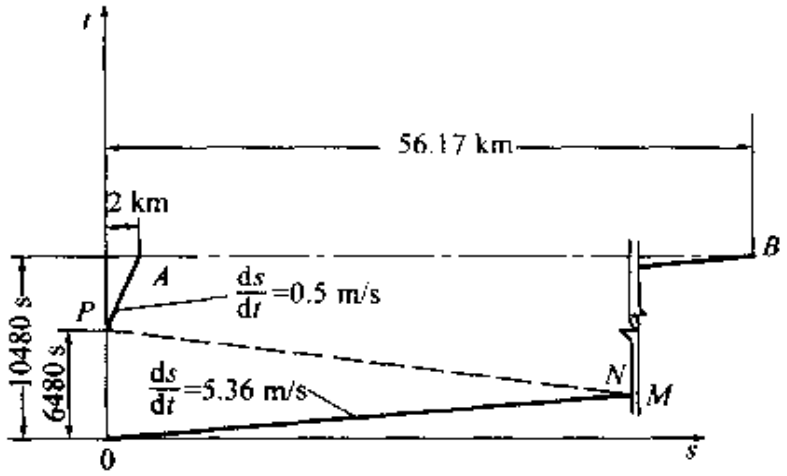


图 14.12

(1)在 s-t 平面上设 PA 为一顺特征线，因底坡平缓，可假设 $i=0$，$J = \dfrac{v^2}{C^2R} = 0$，故 P、A 两点的 v 和 h 满足以下特征关系：

$$\mathrm{d}(v + 2\sqrt{gh}) = g(i - J)\mathrm{d}t = 0$$

即

$$v_P + 2\sqrt{gh_P} = v_A + 2\sqrt{gh_A} \tag{a}$$

接着过 P 点作逆特征线，它与顺特征线 OM 相交于 N，P、N 两点的 v 与 h 满足以下特征关系

$$\mathrm{d}(v - 2\sqrt{gh}) = 0$$

即

$$v_P - 2\sqrt{gh_P} = v_N - 2\sqrt{gh_N} = v_0 - 2\sqrt{gh_0} \tag{b}$$

同样的道理，在过 A 点的逆特征线上

$$v_A - 2\sqrt{gh_A} = v_0 - 2\sqrt{gh_0} \tag{c}$$

合并式(b)和式(c)，可以得到

$$v_P - 2\sqrt{gh_P} = v_A - 2\sqrt{gh_A} \tag{d}$$

从式(a)和式(d)可以看出 $v_P = v_A$，$h_P = h_A$。

根据以上分析，可先求 P 点位置(s_P，t_P)和 v_P、h_P：

$$s_P = 0$$

$$h_P = h_A = 2.2\ \text{m}$$

$$v_P = v_0 - 2\sqrt{gh_0} + 2\sqrt{gh_P}$$

$$= -0.9\ \text{ms}^{-1} - 2 \times 6.26\ \text{ms}^{-1} + 2 \times 4.64\ \text{ms}^{-1} = -4.14\ \text{m/s}$$

因 P 点为渠道末端，水位下降到 2.2 m 时，所需时间为 $t_P = \dfrac{h_0 - h_P}{v} = \dfrac{1.8}{1} = 1.8\ \text{h} = 6480\ \text{s}$，这里 $v = 1\ \text{m/h}$ 为下游库水位下降速度。

过 P 点确定 PA 顺特征线的斜率：

$$\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)_{t=6480} = v_P + \sqrt{gh_P} = v_0 - 2\sqrt{gh_0} + 3\sqrt{gh_P}$$

$$= -0.9\ \text{ms}^{-1} - 12.52\ \text{ms}^{-1} + 13.92\ \text{ms}^{-1} = 0.5\ \text{m/s}$$

确定 A 点位置：

由于 $s_A = 2000\ \text{m}$，且 t_p、s_p 和 PA 顺特征线的斜率 $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ 都已求出，所以

$$t_A = t_P + (s_A - s_P)/\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = 6480 + \frac{2000}{0.5} = 10480\ \text{s} \doteq 3\ \text{h}$$

断面 A 水面下降 1.8 m 所需时间约为 3 小时。

(2)求 $t = 10480\ \text{s}$ 时，水位开始下降的断面 B 的位置。也就是求在 s-t 平面上 OM 线与 $t = 10480$ 线的交点：

$$s_B = 10480\ \text{s} \times 5.36\ \text{ms}^{-1} = 56172.8\ \text{m} \approx 56.17\ \text{km}$$

第四节　直接差分法

直接差分法是用偏差商代替偏微商，把基本微分方程离散化为差分方程，求在自变量域 s-t 平面差分网格上各结点近似数值解的方法。基本微分方程中的偏微商可用不同形式的偏差商即差

分格式来代替，从而得到不同的差分方程。用差分法求解偏微分方程必须解决适定性、相容性、稳定性和收敛性问题，适定性是指微分方程在一定的初始条件和边界条件下不仅具有唯一解，且当初始条件和边界条件稍有扰动时，这一微分方程仍然有解，且和原来的解相比只有小的偏离。根据泰勒级数理论，用偏差商代替偏微商必然会产生截断误差。一个偏微分方程以某种差分格式转化为差分方程后，当步长 $\Delta t \to 0$、$\Delta x \to 0$ 时，差分方程应当收敛于偏微分方程，即截断误差在任一时刻任一网格上均应趋于零，这样的差分方程和微分方程才是相容的，只有相容性得到保证，该差分格式才能对所表达的微分方程逼近。当微分方程是适定的，相应差分方程是相容的，在解差分方程过程中还存在数值稳定性的问题，若差分方程的计算中，某一点引起的误差为 ϵ_{ij}，那么随着计算时间的增加，这一误差的积累是保持有界逐渐减弱，还是不断增大呢？这就是所谓的稳定性问题。若误差 ϵ_{ij} 随计算时间的增加而不断增大，则这一差分方程的计算是不稳定的，若 ϵ_{ij} 有界且逐渐减弱，则是稳定的。所谓收敛性是指当 $\Delta t \to 0$、$\Delta x \to 0$ 时，差分方程的解 u_i^n 与微分方程的解 u 之差 $\epsilon \to 0$。差分格式可分为显式和隐式两种，不同的差分格式都必须满足相容性、稳定性和收敛性的要求，对步长比 $\Delta t/\Delta s$ 加以限制。

本节首先介绍两种常用的显式差分格式，然后对隐式差分格式中的普列斯曼(Preissmann)方法作详细介绍。

一、几种常用的差分格式

以没有沿程汇流的矩形河槽为例，水深 h 和流速 v 作为自变量，非恒定流的基本方程可表示为

$$\frac{\partial h}{\partial t} + v\frac{\partial h}{\partial s} + h\frac{\partial v}{\partial s} = 0 \tag{14.4}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial s} + g\frac{\partial h}{\partial s} = g\left(i - \frac{v^2}{C^2R}\right) \tag{14.8}$$

1. 扩散法

以 f 代表水深或流速，f_m^n 上标 n 表示时间，下标 m 表示断面位置。f 对时间的偏差商表示为

$$\frac{\partial f}{\partial t}=\frac{f_m^{n+1}-\left[\alpha f_m^n+\frac{1-\alpha}{2}(f_{m+1}^n+f_{m-1}^n)\right]}{\Delta t}$$

其中 α 为加权因子。当 $\alpha=0$ 时，该式化为向前偏差商

$$\frac{\partial f}{\partial t}=\frac{f_m^{n+1}-\frac{1}{2}(f_{m+1}^n+f_{m-1}^n)}{\Delta t}$$

对距离的偏差商表示为中心差商

$$\frac{\partial f}{\partial s}=\frac{f_{m+1}^n-f_{m-1}^n}{2\Delta s}$$

阻力项采用初始 n 时刻 $m+1$ 及 $m-1$ 两断面的平均值 $\frac{v^2}{C^2R}$。以上各差分格式代入偏微分方程得到对内结点计算的差分方程，见图 14.13。对上下边界结点则相应用逆、顺特征差分方程(14.29)进行计算。

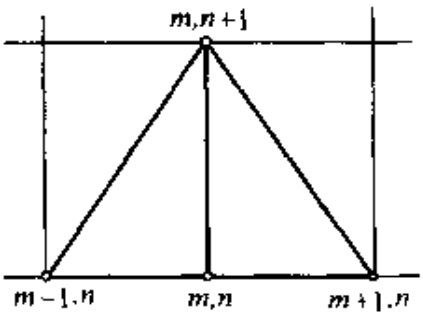


图 14.13

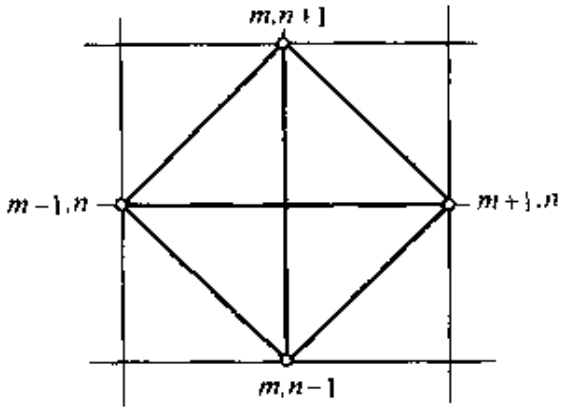


图 14.14

扩散法差分格式属于显式差分格式，经数学分析，此格式稳定的一般条件为库朗(Courant)条件：

$$|c^{\pm}|\frac{\Delta t}{\Delta s}\leqslant 1$$

其中 $c^{\pm}$ 由顺逆特征曲线确定，即 $c^{\pm} = v \pm \sqrt{gh}$。大量实际计算证明，取 $\alpha = 0.1$，能得到光滑的成果。

2. 蛙步法

这种格式(见图 14.14)对时间和距离都采用中心偏差商

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{f_m^{n+1} - f_m^{n-1}}{2\Delta t}$$

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{f_{m+1}^{n} - f_{m-1}^{n}}{2\Delta s}$$

并将阻力项离散化为

$$\frac{v^2}{C^2 R} = \left(\frac{v}{C^2 R}\right)_m^n \left[\alpha v_m^{n+1} + (1-\alpha) v_m^{n-1}\right]$$

其中 α 为加权因子，且 $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$。

蛙步差分格式也属于显式格式，需根据 n 与 $n-1$ 时刻的已知值，计算 $n+1$ 时刻的未知值。为了保证计算的稳定，除满足一般的稳定条件 $|c^{\pm}| \frac{\Delta t}{\Delta s} \leqslant 1$ 外，一般不采用 $\alpha = 0, \alpha = 1$ 这两种情况。

以上为内结点计算。边界点的计算仍采用特征差分方程格式。

3. 四点隐式差分格式

四点隐式差分格式网格的距离步长 Δs 可以是不等距的，而时间步长一般是等距的。网格中任一矩形单元如图 14.15 所示，其中前一瞬时(即 n 时刻)a、b 两点的水力要素已知，而后一瞬时(即 $n+1$ 时刻)c、d 两点的水力要素未知。设每一矩形单元内的水力要素呈直线变化，因此在该单元中任意点 M 处有以下关系：

$$f(M) = f(s,t) = \frac{\theta}{2}(f_{m+1}^{n+1} + f_m^{n+1}) + \frac{1-\theta}{2}(f_{m+1}^{n} + f_m^{n}) \tag{14.34a}$$

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \theta \frac{f_{m+1}^{n+1} - f_m^{n+1}}{\Delta s} + (1-\theta)\frac{f_{m+1}^{n} - f_m^{n}}{\Delta s} \tag{14.34b}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t}=\frac{f_{m+1}^{n+1}-f_{m+1}^{n}+f_{m}^{n+1}-f_{m}^{n}}{2\Delta t} \tag{14.34c}$$

式中 θ 为加权因子，$0\leqslant\theta\leqslant 1$。在 f、$\frac{\partial f}{\partial s}$、$\frac{\partial f}{\partial t}$ 中均含有 m 和 $m+1$ 点 $n+1$ 时刻的未知量，不能像显式那样逐点求解，故为隐式差分格式。经分析表明，四点隐式格式在任意 θ 值具有相容性，且当 $\frac{1}{2}\leqslant\theta\leqslant 1$ 时，格式是稳定的。

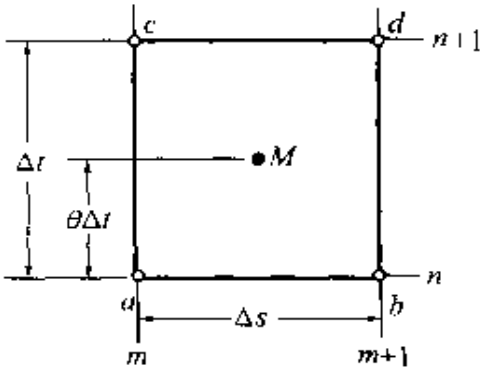


图 14.15

以上只介绍了几种常用的差分格式。另外还有欧洲应用较多的两步法(第一步为扩散法，第二步为蛙步法)以及我国在潮流计算中采用的特征偏心差分格式等，这里不再一一介绍。

总体而言，显式与隐式差分格式各有其优缺点和适用范围。显式差分格式计算方便，但为了保证计算的稳定和收敛，对步长比 $\Delta t/\Delta s$ 有一定限制。对于运动要素变化缓慢的水流，这种方法所需计算时间较多，因此用它来分析快速变化的水流较为合适。隐式差分格式在理论上对时间步长没有限制，实际上为了保证计算精度还是有一定限制的，不过 $\Delta t/\Delta s$ 可比显式的大得多，故宜用于运动要素变化缓慢的水流计算。

二、明渠非恒定流计算的普列斯曼(Preissmann)方法

考虑以水位 z 和流量 Q 为变量的一元圣维南方程组

$$\frac{\partial z}{\partial t}+\frac{1}{B}\frac{\partial Q}{\partial s}=0 \tag{14.3}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{Q^2}{A}\right)+gA\frac{\partial z}{\partial s}+gA\frac{Q\mid Q\mid}{K^2}=0 \tag{14.9}$$

普列斯曼使用前述的四点隐式差分格式(14.34)对以上方程

式(14.3)和(14.9)进行离散得

$$\frac{1}{2}\left(\frac{z_{m+1}^{n+1}-z_{m+1}^{n}+z_{m}^{n+1}-z_{m}^{n}}{\Delta t}\right)+$$

$$\frac{2}{\Delta s}\frac{\left[\theta\left(Q_{m+1}^{n+1}-Q_{m}^{n+1}\right)+(1-\theta)\left(Q_{m+1}^{n}-Q_{m}^{n}\right)\right]}{\left[\theta\left(B_{m+1}^{n+1}+B_{m}^{n+1}\right)+(1-\theta)\left(B_{m+1}^{n}+B_{m}^{n}\right)\right]}=0 \qquad (14.35)$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{Q_{m+1}^{n+1}-Q_{m+1}^{n}+Q_{m}^{n+1}-Q_{m}^{n}}{\Delta t}\right)+\frac{\theta}{\Delta s}\left[\left(\frac{Q^2}{A}\right)_{m+1}^{n+1}-\left(\frac{Q^2}{A}\right)_{m}^{n+1}\right]+$$

$$\frac{(1-\theta)}{\Delta s}\left[\left(\frac{Q^2}{A}\right)_{m+1}^{n}-\left(\frac{Q^2}{A}\right)_{m}^{n}\right]+g\left[\theta\frac{A_{m+1}^{n+1}+A_{m}^{n+1}}{2}+\right.$$

$$\left.(1-\theta)\frac{A_{m+1}^{n}+A_{m}^{n}}{2}\right]\left\{\left[\theta\frac{z_{m+1}^{n+1}-z_{m}^{n+1}}{\Delta s}+(1-\theta)\frac{z_{m+1}^{n}-z_{m}^{n}}{\Delta s}\right]+\right.$$

$$\left[\left(\theta\frac{Q_{m+1}^{n+1}\left|Q_{m+1}^{n+1}\right|+Q_{m}^{n+1}\left|Q_{m}^{n+1}\right|}{2}+\right.\right.$$

$$\left.\left.(1-\theta)\frac{Q_{m+1}^{n}\left|Q_{m+1}^{n}\right|+Q_{m}^{n}\left|Q_{m}^{n}\right|}{2}\right)\left(\theta\frac{(K_{m+1}^{n+1})^2+(K_{m}^{n+1})^2}{2}+\right.$$

$$\left.\left.(1-\theta)\frac{(K_{m+1}^{n})^2+(K_{m}^{n})^2}{2}\right)\right]\right\}=0 \qquad (14.36)$$

分别整理以上两个离散方程式(14.35)和式(14.36)得

$$A_1 z_{m+1}^{n+1}+B_1 Q_{m+1}^{n+1}+C_1 z_{m}^{n+1}+D_1 Q_{m}^{n+1}+F_1=0 \quad (14.37)$$

$$A_2 z_{m+1}^{n+1}+B_2 Q_{m+1}^{n+1}+C_2 z_{m}^{n+1}+D_2 Q_{m}^{n+1}+F_2=0 \quad (14.38)$$

式中系数 A_i、B_i、C_i、D_i 和 $F_i(i=1,2)$都是结点函数值 z_{m+1}^{n+1}、z_{m}^{n+1}、Q_{m+1}^{n+1}、Q_{m}^{n+1}以及 z_{m+1}^{n}、z_{m}^{n}、Q_{m+1}^{n}、和 Q_{m}^{n} 的函数,故方程(14.37)、(14.38)构成非线性代数方程组,可通过迭代法求解。普列斯曼建议,为了便于求解,将非线性方程组中的系数进行线性化。由于在 n 时刻各结点函数 z 和 Q 的值是已知的,在一个时间步长内,方程中的系数函数 $f(z,Q)$都是可微的,这样,$f(z,Q)$在 $n+1$ 时刻的值就可用泰勒级数进行估计:

$$f_m^{n+1}=f_m^n+\Delta f_m=f_m^n+\frac{\partial f_m}{\partial z}\Delta z_m+\frac{\partial f_m}{\partial Q}\Delta Q_m+\cdots$$

式中 Δf_m、Δz_m 和 ΔQ_m 分别是函数 f、变量 z 和 Q 的增量。更一般地，对任何函数 f 在 $n+1$ 时刻的值 f^{n+1} 都可形式上记为

$$f^{n+1} = f^n + \Delta f \tag{14.39}$$

使用这种记号，就可对连续方程的离散方程(14.35)进行改造。由于

$$\theta(B_{m+1}^{n+1} + B_m^{n+1}) + (1-\theta)(B_{m+1}^n + \Delta B_m^n)$$
$$= \theta(\Delta B_{m+1} + \Delta B_m) + (B_{m+1}^n + B_m^n)$$

则

$$\frac{2}{\theta(\Delta B_{m+1} + \Delta B_m) + (B_{m+1}^n + B_m^n)}$$
$$- \frac{2}{(B_{m+1}^n + B_m^n)} \frac{1}{1 + \theta \dfrac{\Delta B_{m+1} + \Delta B_m}{B_{m+1}^n + B_m^n}}$$
$$\approx \frac{2}{(B_{m+1}^n + B_m^n)}\left[1 - \theta \frac{\Delta B_{m+1} + \Delta B_m}{B_{m+1}^n + B_m^n}\right] \tag{14.40}$$

将(14.39)和(14.40)代入(14.35)，得

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta z_{m+1} + \Delta z_m}{\Delta t}\right) + \frac{2}{\Delta s(B_{m+1}^n + B_m^n)}$$
$$\cdot \left(1 - \theta \frac{\Delta B_{m+1} + \Delta B_m}{B_{m+1}^n + B_m^n}\right)\left[\theta(\Delta Q_{m+1} - \Delta Q_m) + (Q_{m+1}^n - Q_m^n)\right] = 0 \tag{14.41}$$

因河宽 B 是水位 z 的单值函数，为

$$\Delta B_m = \frac{\mathrm{d}B_m}{\mathrm{d}z_m}\Delta z_m ; \Delta B_{m+1} = \frac{\mathrm{d}B_{m+1}}{\mathrm{d}z_{m+1}}\Delta z_{m+1}$$

这样式(14.41)可整理为(注意忽略二阶微量 $\Delta z \Delta Q$ 项)

$$A_1' \Delta z_{m+1} + B_1' \Delta Q_{m+1} = C_1' \Delta z_m + D_1' \Delta Q_m + F_1' \tag{14.42}$$

式中系数不同于方程(14.37)，而是

$$A_1' = 1 - \frac{4\theta\Delta t}{\Delta s} \frac{Q_{m+1}^n - Q_m^n}{(B_{m+1}^n + B_m^n)^2} \frac{\mathrm{d}B_{m+1}}{\mathrm{d}z_{m+1}}$$

$$B_1' = \frac{4\theta\Delta t}{\Delta s}\frac{1}{(B_{m+1}^n + B_m^n)};$$

$$C_1' = -1 + \frac{4\theta\Delta t}{\Delta s}\frac{Q_{m+1}^n - Q_m^n}{(B_{m+1}^n + B_m^n)^2}\frac{dB_m}{dz_m}$$

$$D_1' = B_1';$$

$$F_1' = -\frac{4\Delta t}{\Delta s}\frac{(Q_{m+1}^n - Q_m^n)}{(B_{m+1}^n + B_m^n)}$$

按同样的方法处理运动方程(14.36),并注意到

$$\frac{1}{A_m^{n+1}} = \frac{1}{A_m^n + \Delta A_m} \approx \frac{1}{A_m^n}(1 - \frac{\Delta A_m}{A_m^n});$$

$$(Q_m^{n+1})^2 = (Q_m^n + \Delta Q_m)^2 \approx (Q_m^n)^2 + 2Q_m^n\Delta Q_m;$$

$$Q_m^{n+1} \mid Q_m^{n+1} \mid \approx Q_m^n \mid Q_m^n \mid + 2 \mid Q_m^n \mid \Delta Q_m;$$

$$(K_m^{n+1})^2 \approx (K_m^n)^2 + 2K_m^n\Delta K_m;$$

$$\Delta A_m = \frac{dA_m}{dz_m}\Delta z_m; \quad \Delta K_m = \frac{dK_m}{dz_m}\Delta z_m$$

代入(14.36),又可得到

$$A_2'\Delta z_{m+1} + B_2'\Delta Q_{m+1} = C_2'\Delta z_m + D_2'\Delta z_m + F_2' \quad (14.43)$$

式中系数不同于方程(14.38),限于篇幅,这里不给出其表达式,应用时可仿照式(14.42)的推导办法求得。式中各系数还包含有关水位 z 的导数项$\frac{dB}{dz}$、$\frac{dA}{dz}$、$\frac{dK}{dz}$等,在计算这些系数时,必须首先对这些导数进行适当的离散,离散办法可参考有关文献。

这样,通过式(14.39)将原来的非线性代数方程组(14.37)、(14.38)进行线性化,新的方程组(14.42)、(14.43)中的系数 A_1',B_1',…等仅仅依赖于 n 时刻结点变量值,因此是一个线性代数方程组。但是,应该指出,方程(14.42)、(14.43)只能看成是非线性方程(14.37)、(14.38)的第一次近似,线性化后的方程仅仅为迭代求解时提供便利,它可以通过矩阵追赶的办法逐次进行迭代,每追赶一次得到一次近似增量 Δz 和 ΔQ,对方程中各系数修正后才能

进行下一次迭代。要使线性方程(14.42)、(14.43)较好地逼近方程(14.37)、(14.38),或者说,要使方程(14.42)、(14.43)在每次追赶后具有较好的近似值,必须满足 $\Delta f/f<1$ 这个条件,如果各项追赶迭代所得的函数增量 Δf 与函数值 f 具有同阶量级,那么必须减小时间步长 Δt 使 $\Delta f/f<1$ 得到满足,追赶迭代求解才能进行下去。实际计算表明,如果方程(14.37)、(14.38)中的系数是水位 z 和 Q 的连续函数(大多数情况都能满足),线性方程(14.42)、(14.43)能提供很好的近似,一般经二到三次追赶迭代就能满足要求。

下面介绍线性方程(14.42)、(14.43)的求解方法。

线性方程组(14.42)、(14.43)是在一个河段两个计算结点 m 和 $m+1$ 上写出的,两个方程中有四个未知数,方程不可独立求解。但是,如果将研究河段划分成 M 个计算结点(计算断面),那么就有($M-1$)个子河段,可列出 $2(M-1)$ 个方程,在这些方程中包含有 $2M$ 个未知数 ΔQ_m、Δz_m($m=1,2,\cdots,M$),如果再加上两个边界条件一共就有 $2M$ 个方程,正好可以求解。方程组(14.42)、(14.43)可按追赶法求解,具体过程如下所述。

假定 Δz_m 与 ΔQ_m 之间存在如下关系

$$\Delta Q_m = E_m\Delta z_m + F_m \tag{14.44}$$

其中 E_m、F_m 为已知系数。如果这个假定为真,则可以证明有如下关系成立

$$\Delta Q_{m+1} = E_{m+1}\Delta z_{m+1} + F_{m+1} \tag{14.45}$$

其中 E_{m+1}、F_{m+1} 为待定系数。

将(14.44)代入式(14.42)、(14.43)得

$$A_1'\Delta z_{m+1} + B_1'\Delta Q_{m+1} = (C_1' + D_1'E_m)\Delta z_m + D_1'F_m + F_1' \tag{14.46}$$

$$A_2'\Delta z_{m+1} + B_2'\Delta Q_{m+1} = (C_2' + D_2'E_m)\Delta z_m + D_2'F_m + F_2' \tag{14.47}$$

从式(14.46)可解出

$$\Delta z_m = L_m \Delta z_{m+1} + M_m \Delta Q_{m+1} + N_m \tag{14.48}$$

式中

$$\left.\begin{aligned} L_m &= A_1'/(C_1' + D_1'E_m); \\ M_m &= B_1'/(C_1' + D_1'E_m); \\ N_m &= -(D'F_m + F_1')/(C_1' + D_1'E_m). \end{aligned}\right\} \tag{14.49}$$

然后,用$(C_2' + D_2'E_m)$乘以式(14.46),用$(C_1' + D_1'E_m)$乘以式(14.47)后两式相减消去Δz_m后,可解出ΔQ_{m+1}得

$$\Delta Q_{m+1} = \frac{-A_1'(C_2' + D_2'E_m) + A_2'(C_1' + D_1'E_m)}{B_1'(C_2' + D_2'E_m) - B_2'(C_1' + D_1'E_m)}\Delta z_{m+1} + \frac{(D_1'F_m + F_1')(C_2' + D_2'E_m) - (D_2'F_m + F_2')(C_1' + D_1'E_m)}{B_1'(C_2' + D_2'E_m) - B_2'(C_1' + D_1'E_m)} \tag{14.50}$$

比较式(14.45)和(14.50)可知

$$\left.\begin{aligned} E_{m+1} &= \frac{-A_1'(C_2' + D_2'E_m) + A_2'(C_1' + D_1'E_m)}{B_1'(C_2' + D_2'E_m) - B_2'(C_1' + D_1'E_m)} \\ F_{m+1} &= \frac{(D_1'F_m + F_1')(C_2' + D_2'E_m) - (D_2'F_m + F_2')(C_1' + D_1'E_m)}{B_1'(C_2' + D_2'E_m) - B_2'(C_1' + D_1'E_m)} \end{aligned}\right\} \tag{14.51}$$

这里实际上已经证明了式(14.45)成立。式(14.45)给出了第$m+1$结点(计算断面)上的水位流量的增量之间的线性关系,只要求出其中一个增量,另一个增量就确定了。因为线性方程(14.42)、(14.43)中的所有系数都只与n时刻的各结点函数值z_m^n、Q_m^n($m = 1,2,\cdots,M$)有关,它们是已知的。这样,由式(14.51)可知,结点$m+1$上的E_{m+1}、F_{m+1}值仅依赖于结点m上的E_m、F_m值。如果上游边界$m=1$上的值E_1和F_1已知,就可计算出E_2和F_2,依次地可由式(14.51)递推计算出所有的E_m、F_m($m = 1,2,\cdots,M$)。

此外,由式(14.49)又可知,系数L_m、M_m和N_m取决于E_m和F_m,这样,一旦E_m和F_m计算出来就可计算出各结点的系数L_m、

M_m 和 N_m。整个计算过程是先利用上游边界条件确定 E_1 和 F_1，对任意两结点 m 和 $m+1$，计算线性方程(14.42)、(14.43)中的系数，进而计算 E_{m+1}、F_{m+1}以及 L_m、M_m 和 N_m，并储存起来，这种过程是从上游向下游进行的，称为追的过程或前扫描。一旦求得 E_M 和 F_M，利用下边界条件，例如下游水位已知，依据(14.45)可得

$$\Delta Q_M = E_M \Delta z_M + F_M \tag{14.52}$$

求得 ΔQ_M 后，利用 ΔQ_M 和 Δz_M 以及在追的过程中计算得到的 L_{M-1}、M_{M-1} 和 N_{M-1}，就可由式(14.48)计算 Δz_{M-1}，又可用式(14.45)计算出 ΔQ_{M-1}。如此递推下去，便可解出所有的 Δz_m、$\Delta Q_m(m=1,2,\cdots,M)$，这一过程从下游向上游进行，称为赶的过程或后扫描。

如果前后两次计算得到的值 Δz_m、ΔQ_m(或 z_m^{n+1}、Q_m^{n+1})相差在允许范围内，则在一个时段内的追赶迭代计算结束，进行下一时段的计算。

上述这种追赶过程，需要用到上游边界条件确定 E_1 和 F_1，以及下游边界条件确定 Δz_M。下面分别对不同类型的边界条件说明 E_1、F_1 和 z_M 的求法。

在上游边界上，有三种不同类型的边界条件。

第一种类型，给出上游流量过程线 $Q|_{s=s_1}=Q(t)$，s_1 为上游边界位置。在这种情况下，时刻$(n+1)\Delta t$ 时的流量 $Q(n\Delta t+\Delta t)$ 是已知的，则

$$\Delta Q_1 = Q(n\Delta t+\Delta t) - Q_1^n \tag{14.53}$$

现要将式(14.53)改写成如下形式

$$\Delta Q_1 = E_1 \Delta z_1 + F_1 \tag{14.54}$$

比较可得

$$E_1 = 0; \quad F_1 = Q(n\Delta t+\Delta t) - Q_1^n$$

第二种类型，给出上游水位过程线 $z|_{s=s_1}=z(t)$。在这种情况下有

$$\Delta z_1 = z(n\Delta t + \Delta t) - z_1^n \tag{14.55}$$

由式(14.54)可得

$$\Delta z_1 = \frac{1}{E_1}\Delta Q_1 - \frac{F_1}{E_1} \tag{14.56}$$

比较式(14.55)和(14.56),可得

$$\begin{cases} \dfrac{\Delta Q_1}{E_1} = 0 \\ -\dfrac{F_1}{E_1} = z(n\Delta t + \Delta t) - z_1^n \end{cases} \tag{14.57}$$

为满足(14.57),可取 $E_1 = \alpha_1$,α_1 为任意整数,数量级在 10^6 左右,只要使得 $\alpha_1 \gg \Delta Q_1$ 即可,此时有

$$E_1 = \alpha_1; F_1 = -\alpha_1[z(n\Delta t + \Delta t) - z_1^n]$$

第三种类型,给出水位流量关系 $Q|_{s=s_1} = Q(z)$。此时,在 n 时刻用泰勒级数展开有

$$Q(n\Delta t + \Delta t) \approx Q(n\Delta t) + \frac{\partial Q}{\partial z}\Delta z_1$$

而 $Q(n\Delta t + \Delta t) = Q_1^{n+1} = Q_1^n + \Delta Q_1$,故

$$\Delta Q_1 = Q(n\Delta t) + \frac{\partial Q}{\partial z}\Delta z_1 - Q_1^n$$

与式(14.54)比较,得:

$$E_1 = \frac{\partial Q}{\partial z}; F_1 = Q(n\Delta t) - Q_1^n$$

上式中 $Q(n\Delta t)$为 n 时刻 Q 在 $Q(z)$上的取值,Q_1^n 为 n 时刻的计算值。如果计算值 Q_1^n 与边界值一致,有 $F_1 = 0$,但由于计算误差,这个值不可能十分精确。计算中考虑 F_1 的存在,可以对计算误差作轻微校正。

在下游边界上,同样有三种不同类型的边界条件用于确定 Δz_M。

第一种类型,给出下游水位过程线 $z|_{s=s_M} = z(t)$,s_M 为下游

边界位置，此时可直接离散得

$$\Delta z_M = z(n\Delta t + \Delta t) - z_M^n$$

实际应用表明，计算时取计算值 z_M^n 较佳，而不取边界值 $z(n\Delta t)$。

第二种类型，给出流量过程线 $Q|_{s=s_M} = Q(t)$，则有

$$\Delta Q_M = Q(n\Delta t + \Delta t) - Q_M^n$$

考虑到式(14.52)，故有

$$\Delta z_M = \frac{1}{E_M}\{Q(n\Delta t + \Delta t) - Q_M^n - F_M\}$$

第三种类型，给出水位流量关系 $Q|_{s=s_M} = Q(z)$，这时有

$$Q(n\Delta t + \Delta t) \approx Q(n\Delta t) + \frac{\partial Q}{\partial z}\Delta z_M$$

又因为

$$\Delta Q_M = \frac{\partial Q}{\partial z}\Delta z_M = E_M \Delta z_M + F_M$$

故

$$\Delta z_M = F_M/(\frac{\partial Q}{\partial z} - E_M)$$

第五节　明渠非恒定急变流——断波

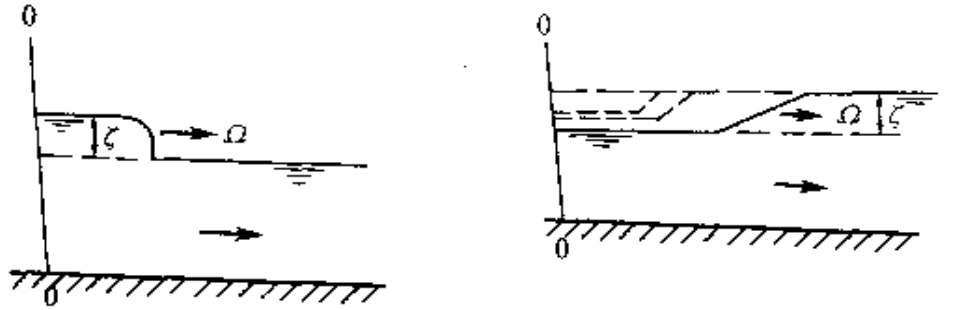
明渠非恒定急变流是明渠中流量在短时间内发生急剧变化时引起的非恒定流动现象。其基本特征是波峰陡峻，形成阶梯式前缘，故也称为断波。例如溃坝后向下游传播的涌波、潮汐河口的涌潮等，都是断波的典型例子。

断波的形成可以理解为在一系列无限短时段内，由起始断面发生的一个个元波叠加起来的结果。以顺涨波为例，流量刚改变所引起的第一个元波的波速为

$$c = v_0 + \sqrt{\frac{gA_0}{B_0}} \tag{14.58}$$

式中 v_0、A_0 和 B_0 分别表示在流量未改变时的断面平均流速、过水断面面积和水面宽度。随着流量的增加，水面不断涨高，后续的元波波速必然稍大于前一个元波的波速，波峰将逐渐变陡，形成如图

14.16(a)所示的阶梯式形状。至于逆水顺波，则因水面连续地降低，后续的元波波速总是小于前一个元波波速，结果波峰将逐渐坦化，如图(14.16(b)所示。



(a)　　(b)

图 14.16

断波波峰的运动速度称为波速，以 Ω 表示，以区别于元波波速 c。波峰到达某一断面，就使该断面的流量、流速等水力要素发生变化。断波到达某一断面时引起的流量变化量称为波额流量，简称波流量。

本节首先讨论断波波速和波流量的变化规律，然后作为分析断波的例子，介绍溃坝波的简化解。

一、棱柱体明渠中的断波波速和波流量

设在缓坡明渠中产生一顺流而下的涨水断波，波高为 ζ，波速为 Ω，如图 14.17 所示。在断波到达之前，水流为恒定流，其流量为 Q_0，水深为 h_0，过水断面面积为 A_0，水面宽度为 B_0，平均流速为 v_0。

假定忽略粘滞阻力，则断波在运动过程中，其波形和波速不变。为了应用恒定流的连续方程和动量方程来分析断波运动，采用一个以断波波速 Ω 顺流移动的坐标系统。相对于这个坐标，断波的运动就变成恒定流了。在波峰未到达的断面上，流速为 $(v_0-\Omega)$，过水断面面积为 A_0；波峰到达后的断面上，假设流速为 v，过

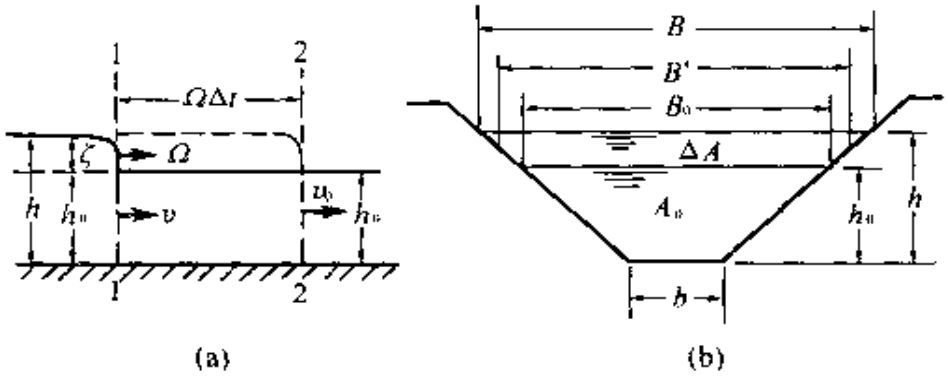


图 14.17

水断面面积为$(A_0 + \Delta A)$。根据恒定总流的连续方程可得

$$v(A_0 + \Delta A) = (v_0 - \Omega)A_0$$

或写成

$$v = \frac{(v_0 - \Omega)A_0}{A_0 + \Delta A} \tag{14.59}$$

在棱柱体缓坡明渠断波中，取断面 1 和 2，如图 14.18 所示，对图中虚线所围成的隔离体应用动量方程得

$$P_1 - P_2 + G_s - T = \rho(v_0 - \Omega)A_1[(v_0 - \Omega) - v] \tag{14.60}$$

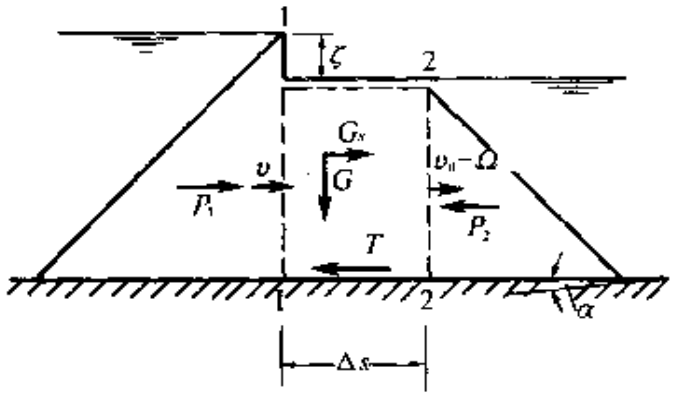


图 14.18

式中 T 为渠底及壁面的阻力，若壁面平均切应力为 τ_0，湿周为 χ，则阻力

$$T = \chi\tau_0\Delta s$$

G_s 为隔离体重力在水流方向的分量

$$G_s = \rho g A_0 \Delta s \sin\alpha$$

在断面 1、2 上近似认为压强符合静水压强分布规律，并以 y_{c1}、y_{c2} 分别代表断面 1、2 的形心深度，以 ξ 代表 ΔA 的面积形心在水面下的深度，并注意到有如下面积矩关系。

$$(A_0 + \Delta A) y_{c1} = A_0(y_{c2} + \zeta) + \Delta A \xi$$

则 $$P_1 - P_2 = \rho g y_{c1}(A_0 + \Delta A) - \rho g y_{c2} A_0 = \rho g(\zeta A_0 + \xi \Delta A)$$

当 $\Delta s \to 0$ 时，G_s 和 T 可忽略不计，并令 $\Omega' = v_0 - \Omega$，称为断波的相对波速，代入式(14.60)可得

$$\rho g(\zeta A + \xi \Delta A) = \rho \Omega' A_0[(v_0 - \Omega) - v] \tag{14.61}$$

将式(14.59)代入上式得

$$\Omega' = \pm\sqrt{g\left(\frac{A_0\zeta}{\Delta A} + \zeta + \xi + \frac{\Delta A}{A_0}\xi\right)} \tag{14.62}$$

上式就是任意断面形状的棱柱体明渠中断波的相对波速计算公式。

对于梯形明渠，由于 $\Delta A = \zeta B'$，$B' = \frac{1}{2}(B + B_0)$（见图 14.17），$\xi \doteq \frac{1}{2}\zeta$，相对波速计算式简化为

$$\Omega' = \pm\sqrt{g\left(\frac{A_0}{B'} + \frac{3}{2}\zeta + \frac{B'\zeta^2}{2A_0}\right)} \tag{14.63}$$

断波的绝对波速为

$$\Omega = v_0 + \Omega' = v_0 \pm \sqrt{g\left(\frac{A_0}{B'} + \frac{3}{2}\zeta + \frac{B'\zeta^2}{2A_0}\right)} \tag{14.64}$$

对于波高较小的断波（$\zeta \ll h$），上式中的 $\frac{B'\zeta^2}{2A_0}$ 可忽略，则

$$\Omega = v_0 \pm \sqrt{g\left(\frac{A_0}{B'} + \frac{3}{2}\zeta\right)} \tag{14.65}$$

对于矩形明渠，波高 $\zeta \ll h$ 时，断波的绝对波速公式可简化为

$$\Omega = v_0 \pm \sqrt{gh_0} \tag{14.66}$$

应用以上的计算式计算断波波速时，“+”号用于顺流断波，“-”号用于逆流断波。对于涨水断波，波高 ζ 取正值，对于落水断波，ζ 取负值。

下面推导波流量与波速、波高之间的关系式。

设顺流涨水断波波峰于某一时刻 t 到达断面 1，经过 Δt 时段后到达断面 2，传播距离为 $\Delta s = \Omega \Delta t$，在 Δs 流段上应用非恒定流连续方程(14.2)得

$$\frac{Q_0 - Q}{\Omega \Delta t} + \frac{(A_0 + \Delta A) - A_0}{\Delta t} = 0$$

对于梯形断面明渠，$\Delta A = \zeta B'$，波流量 $\Delta Q = Q - Q_0$，

则

$$\Delta Q = \Omega \zeta B' \tag{14.67}$$

上式就是矩形明渠中断波波流量与波高及波速之间的关系式。在式(14.65)和式(14.67)中，未知量一般有 ζ、Ω 和 ΔQ 其三个，知道其中一个，就可以求出另外两个。

二、溃坝波的简化解

溃坝造成的洪水波称为溃坝波，它是断波，但又有其特殊性，影响因素复杂，如溃决过程、缺口形状、下游河道情况等都影响到溃坝洪水的传播。在实际工程中大多采用简化分析计算，以推求溃坝最大流量，并为溃坝洪水的演进计算提供初始条件。

简化分析的基本假定是，河道无限长，断面为矩形，底坡为零，不计阻力，坝体瞬间全部溃决，坝趾下游河床是干涸的。坝体瞬间全溃后，坝趾处将产生无数个元波，水库中水体在巨大水头的作用下，向下游流动，如图 *14.19* 所示。靠近底部的元波，因 h 较小，所以相对波速 $\sqrt{gh}$ 也较小，而被水流带向下游。靠近水表面的元波，因 h 较大，相对波速也较大，故仍能逆流向上游传播。

设坝趾处为坐标原点 $s = 0$，因元波在溃坝瞬间全部发生，故逆特征线都集中于原点，靠上部的元波向上游传播，靠下部的元波

向下游传播，所以逆特征线有指向上游的，也有指向下游的。如图 14.20 所示，沿任意逆特征线 OB 有

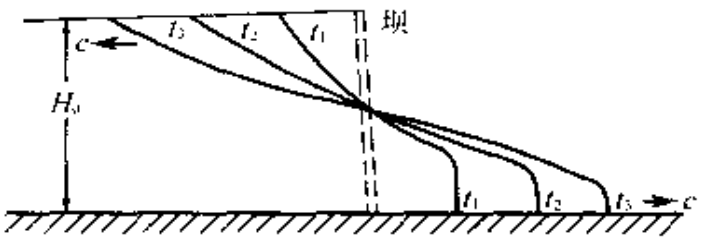


图 14.19

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = v - \sqrt{gh} \tag{14.68}$$

$$\mathrm{d}(v - 2\sqrt{gh}) = 0 \tag{14.69}$$

由式(14.69)可得

$$v - 2\sqrt{gh} = C \tag{14.70}$$

若式(14.68)中等号右边为常数 C，就可积分得出溃坝波的简化解，为此过逆特征线 OB 上任一点 B 作顺特征线 AB，与逆特征线 OA 交于 A 点。逆特征线 OA 是水库最上部的元波向上游传播的轨迹线，该元波所到之处的水体还未受到扰动，即 $v = 0, h = H_0$，因此，在逆特征线 OA 上，任一点都有

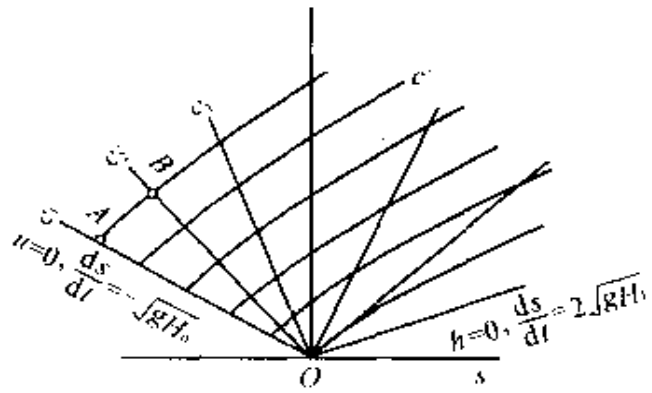


图 14.20

$$v = 0, h = H_0 \tag{14.71}$$

对于顺特征线 AB 有

$$\mathrm{d}(v + 2\sqrt{gh}) = 0 \tag{14.72}$$

即

$$v + 2\sqrt{gh} = C' \tag{14.73}$$

C' 可由 A 点定出，即将式(14.71)代入式(14.73)得

$$v + 2\sqrt{gh} = v_A + 2\sqrt{gh_A} = 2\sqrt{gH_0} = C' \tag{14.74}$$

沿逆特征线 OB 联解式(14.70)和式(14.74)得

$$v = \sqrt{gH_0} + \frac{C}{2}, \quad \sqrt{gh} = \frac{1}{4}(2\sqrt{gH_0} - C)$$

$$\frac{ds}{dt} = v - \sqrt{gh} = \frac{3}{4}C + \frac{1}{2}\sqrt{gH_0} \tag{14.75}$$

对式(14.75)积分并代入式(14.74)得

$$\frac{s}{t} = 2\sqrt{gH_0} - 3\sqrt{gh} \tag{14.76}$$

整理得

$$\frac{h}{H_0} = \frac{4}{9}\left(1 - \frac{s}{2\sqrt{gH_0}t}\right) \tag{14.77}$$

式(14.77)说明溃坝波的水面线是抛物线，给定某一时刻，就可计算瞬时水面线。在坝趾处 $s = 0$，由式(14.77)可得

$$h = \frac{4}{9}H_0 \tag{14.78}$$

将式(14.78)代入式(14.74)得

$$v = 2\sqrt{gH_0} - 2\sqrt{g \cdot \frac{4}{9}H_0} = \frac{2}{3}\sqrt{gH_0} \tag{14.79}$$

由此得坝趾处的单宽流量为

$$q = vh = \frac{8}{27}\sqrt{g}H_0^{3/2} \tag{14.80}$$

第十五章　水工建筑物的高速水流简介

第一节　概　　述

目前不少水工建筑物的水头为几十米，甚至高达百米以上。如果水头大于 40～50 m，相应泄流的流速大致可达 25～28 m/s，水头更高流速更大，有的流速可达 40 m/s 以上。因之把中、高水头水利枢纽泄水建筑物中的水流称为高速水流。

水工建筑物中的高速水流会出现如下的一些问题：

1. 水流的强烈紊动使脉动压强增大，从而增加了建筑物的瞬时动荷载。有时脉动压力还会引起轻型建筑物或构件的随机振动；

2. 出现水流的掺气和空化，形成液相和气相的二相流，从而使水流的连续性遭到破坏。掺气和空化会带来一系列问题，例如溢洪道水流掺气会导致其中的水深增大，因而要求增高边墙的高度，空化可能导致边界材料的空蚀破坏等；

3. 当地形或工程布置的需要，要求明渠改变方向，或者明渠具有收缩段或扩散段时，渠中急流就会在边界改变处开始产生冲击波，并向下游传播。冲击波所到之处也会使水深增加，从而要求增加边墙的高度。

以上问题虽然是对高速水流而言，但当流速不太大时，也会出现上述问题。然而，高速水流中产生的这些问题更为突出，其后果也更为严重。

本世纪 20 年代以后，水工建筑物的高速水流问题开始突出，70 年来国内外中、高水头水工建筑物破坏实例中，高速水流产生的问题占相当的比例。因此，在中、高水头水工建筑物的设计、施

工、运行和管理中，对高速水流问题应予以重视，以确保建筑物安全运行。

高速水流问题十分复杂，涉及面广，有些理论尚不成熟，认识有待提高。本章只介绍一些基本知识，作为进一步学习的基础。

第二节　运动要素的数据处理

紊流中任一点的运动要素（动水压强，流速等）具有脉动现象，也就是说它们是一个随机过程，不能用一个固定的函数形式描述。水力学中曾用取时均值的办法，解决了不少实际问题。但是，进行高速水流专题（如空蚀、掺气、振动等）研究时，只有时均值远远不能满足研究的要求，必须利用概率论和随机过程的有关理论进行分析处理。

在进行分析处理时，首先要在有限的时段内采集样本，作为整个过程（母体）的代表，该样本必须是各态历经的平稳随机过程。所谓平稳的随机过程，是指该过程的概率分布函数不随时间变化。各态历经是指总体中取出的样本函数都同样地经历了整个过程的各种状态。一般，在时均恒定流条件下测得的运动要素过程，可以假定为各态历经的平稳随机过程。图 15.1 是某水电站枢纽溢洪道边墙上某点的动水压强的样本。



图 15.1

对运动要素的样本进行数据处理，要得到其幅域、时域、频域的成果。进行分析处理时，首先必须把样本离散化，也就是把观测时段 T 分成许多相等的 Δt（称 Δt 为采样时间间隔）段，分别读出各 Δt 段末的运动要素的量值，作为 $t_1, t_2, \cdots$ 的相应的运动要素

值。Δt 取多大，要根据所分析问题的目的要求和计算工作量而定。笔者在计算某溢洪道边墙上某点的动水压强谱密度函数时，曾取 $\Delta t = 0.001$ s。

随着量测技术的提高和电子计算机的快速更新换代，目前大多数采用专用微机在现场直接得出分析成果。下面概要地阐述数据处理内容：

1. 幅域分析

幅域分析是分析样本的统计特征值。设运动要素 x 是时间 t 的随机函数 $x(t)$，通过离散化，可得样本的各瞬时值 $x(t_i)$，则样本的均值、均方值、方差和标准差分别为

均值
$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x(t_i) \tag{15.1}$$

$$N = \frac{T}{\Delta t}$$

N 为样本容量。

均方值
$$\psi = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x^2(t_i) \tag{15.2}$$

方差
$$D = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} [x(t_i) - \bar{x}]^2 \tag{15.3}$$

标准差
$$\sigma = \sqrt{D} \tag{15.4}$$

由上式可知，$x(t_i)$ 愈接近于 $\bar{x}$，方差 D 和标准差 σ 愈小；反之愈大。因此，它们是表示 $x(t_i)$ 偏离 $\bar{x}$ 的程度，是反映紊动强弱的指标。其中 σ 与 $\bar{x}$ 具有相同的单位，经常使用。

以上计算结果还不能全面地反映随机过程的特征，还要计算其概率密度函数，它表示某一 $x(t_i)$ 在某一指定范围内的概率以及幅值的分布情况。笔者曾在不同的边界条件下测得脉动压强和流速，所计算的概率密度函数，大多接近于正态分布。

正态分布的概率密度函数为

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}} \tag{15.5}$$

图 15.2 是利用图 15.1 的成果计算出的脉动压强的概率密度函数。

利用正态分布的特性还可求得某一概率下的幅值用于进一步的分析，此处从略。

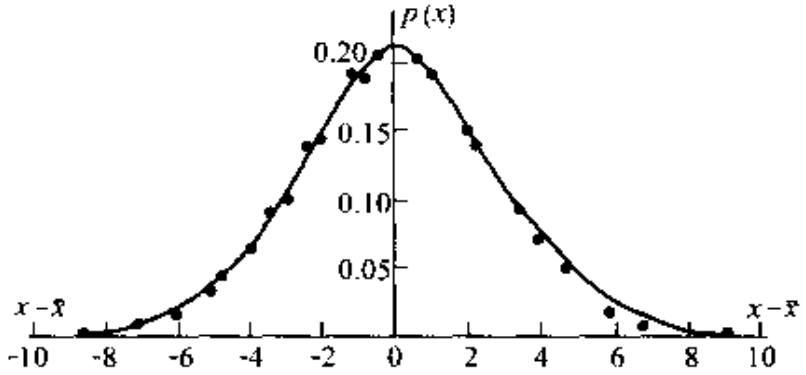


图 15.2

2. 时域分析

随机过程的时域分析，实质上是随机波形的相关分析，即求其自相关函数。运动要素 $x(t)$ 的自相关函数 $R_x(\tau)$ 定义为

$$R_x(\tau) = \frac{1}{T}\int_0^T x(t) \cdot x(t+\tau)\mathrm{d}t \qquad (15.6)$$

式中 τ 称为时间位移。$R_x(\tau)$ 描述某一时刻 $x(t)$ 与经过 τ 后的 $x(t+\tau)$ 之间的依赖关系。

图 15.3 是某溢洪道模型中一点的脉动流速的自相关函数图。当 $\tau=0$ 时 $R_x(\tau)$ 值最大。随着 τ 的增大，$R_x(\tau)$ 值很快地减小，当 τ 增大到一定值后，$R_x(\tau)$ 趋于零。

3. 频域分析

随机过程的频域分析就是分析该过程的频率结构、组成和相应量的大小，即求其功率谱密度函数。

随机过程的自相关函数 $R_x(\tau)$ 和功率谱密度函数 $S_x(f)$ 在数学上互为傅立叶变换。

功率谱密度函数定义为

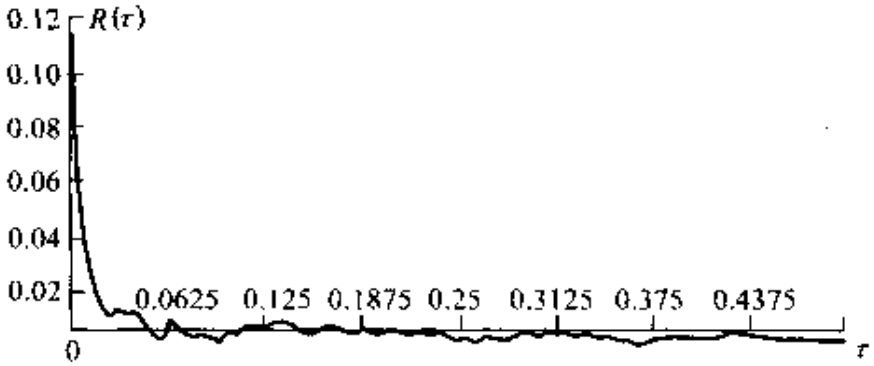


图 15.3

$$S_x(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \tag{15.7}$$

$R_x(\tau)$可写成

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f) e^{j2\pi f\tau} df \tag{15.8}$$

式中 f 为频率，其单位为 Hz。

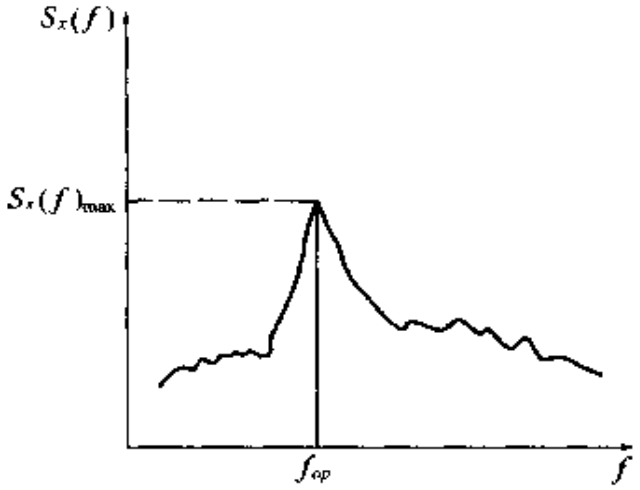


图 15.4

不同性质的随机过程其功率谱密度函数图形各不相同。如果其函数图形如图 *15.4* 所示，有极大值 $S_x(f)_{max}$，则称其相应的频率 f_{op} 为卓越频率(或称最优频率)。卓越频率 f_{op} 是分析建筑物在水流作用下，作随机振动时的一个重要参数。

从紊流结构可以理解水流运动要素频域分析的必要性。紊动

的水流中存在着许多尺度大小不同的涡体，涡体的运动导致运动要素的脉动，大尺度的涡体表现出振幅大频率低，小尺度的涡体则振幅小频率高，最终构成了运动要素的随机过程。

对水流运动要素的频域分析，要求具备许多知识，需要时可参阅有关文献。

第三节　水工建筑物的空蚀

一、空蚀的危害

第三章曾经阐明，在常温下，液流中局部区域的压强降低到该温度下的蒸汽压强时，液流内部会产生汽化或气相现象称为空穴（也称空化或气穴）。这些存在于液流中的空穴又称空泡，随流运动，当流到高压区（即 $p > p_v$）时，空泡在极短的时间内溃灭，产生极高的瞬间压强，当它发生在固体边壁（或其附近）上，致使固体边壁剥蚀破坏，称为空蚀。

高速水流引起的空蚀对水工建筑物的危害往往相当严重。近70年来，国内外许多水利水电工程表明，在中、高水头泄水建筑物的某些部位（如落差大于40米的溢流坝面，水头大于20米的消力墩，水头高于10米的闸门门槽等），当设计考虑不周、施工粗糙时，泄流后常常发生建筑物某些部位的空蚀。空蚀的产生直接影响建筑物的正常运转，甚至造成建筑物的失事。

例如，美国鲍尔德水利枢纽的泄洪隧洞，1941年8月开始运用，流量低于设计值，运行了四个多月后，进行洞内检查，发现弯段处洞底被破坏，并在岩基中形成一个深13.7 m，长35 m，宽9.5 m的大坑。

前苏联布拉茨克水电站的溢流坝面，由于拆模板时遗留下突出体、未填塞的施工缝以及一些不平整物等原因，经连续过水11昼夜后，在溢流面上形成深1.2 m，体积约12 m^3 的空蚀坑。

我国刘家峡水电站右岸泄洪隧洞，在混凝土溢流面尚未全部

衬砌完毕的情况下，于 1969 年 3 月泄水，流量为 900 ~ 1000 m^3/s，最大流速约为 38 m/s，短期内即发现反弧段下游有一个深 6 ~ 9 m，宽 10 余米的空蚀坑。修复后于 1972 年 5 月泄水，后发现洞内有雷鸣声，停水检查，又发现反弧段与水平段联结处有一大片空蚀破坏，坑深为 4.8 m，长 23 m，宽 13 m。

二、空穴数

第三章第九节已给出了空穴发生条件 $p \leqslant p_v$，只要知道水流中某处压强值，就可判别空穴是否发生。然而水流中局部压强往往难以得知，因此，常采用无因次的空穴数 K 作为衡量空穴是否发生的指标，其表达式为

$$K = \frac{p - p_v}{\frac{1}{2}\rho v^2} = \frac{\frac{p}{\rho g} - \frac{p_v}{\rho g}}{\frac{v^2}{2g}} \tag{15.9}$$

式中 p 和 v 是参考压强和参考流速。根据不同的问题，为了便于研究，参考压强可取水流未受边界局部变化影响处的绝对压强，或取最低点的压强，或某一特定点压强等；参考流速可取水流未受边界局部变化影响处的断面平均流速或取某一特定点流速。ρ 为水的密度。由上式可知：压强愈低，空穴数愈小，发生空穴的可能性就愈大。由于不同的研究者采用不同参考压强和流速，使之对同一问题的空穴数在数值上差异较大，运用时应予以注意。

如考虑脉动压强 p' 对空穴数影响，则空穴数可表示为

$$K' = \frac{(\bar{p} - p') - p_v}{\frac{1}{2}\rho v^2} \tag{15.10}$$

式中 $\bar{p}$ 是参考点的时均压强，p' 是该点脉动压强值。考虑了脉动压强影响使之空穴数较未考虑脉动压强的空穴数小。

开始产生空穴时的水流空穴数称为初生空穴数或称临界空穴数，用 K_i 表示。因此，空穴发生的条件又可表示为

$$K \leqslant K_i \tag{15.11}$$

初生空穴数大，容易发生空穴；反之，不容易发生空穴。初生空穴数的数值，不仅随边界平顺情况及水流分离程度的不同而不同，也与水流空穴数一样，随着选用参考压强不同而异。例如，当选用研究点处的压强为参考压强时，对于一般溢流坝面，$K_i = 0.3 \sim 0.5$；对于很平顺光洁的边界（如螺旋桨或水轮机叶片），$K_i = 0.1 \sim 0.2$；对于一般绕流体，$K_i < 0.6$；对于边界极不平顺（如闸门槽，消力墩等）引起水流分离的情况，$K_i > 0.6$。

三、容易发生空蚀的部位

前面已经阐明，发生空蚀的前提是产生空穴，而空穴则发生在容易形成低压的地方。根据能量方程，总体来说，位置高、流速大的地方压强低。然而在水工建筑物中，边界急剧变化所形成的局部低压区也不可忽视，因为边界急剧变化常引起主流与边界分离，产生漩涡，而漩涡的中心是低压区。在低压区形成的空穴，随流进入高压区（$p > p_v$）溃灭而产生空蚀。因此，分叉管道、有压管道的收缩段或转弯段、溢流坝面、门槽、闸墩、消力墩等或不平整处的下游都是容易发生空蚀的部位，详见图 15.5。此外，螺旋桨及水轮机叶片的高速旋转以及施工粗糙等都有可能导致空蚀的发生。

四、减轻和消除空蚀的措施

通过多年的研究和工程实践，有如下较为有效的减蚀或免蚀措施：

1. 改善边界轮廓线

设计时应尽量避免边界急剧变化，使之尽量达到平顺或做成流线型。要提高施工质量，把溢流的不平整度控制在设计的要求之内，工程完建时要清除钢筋的露头和其他突出物或缝隙。

2. 用抗蚀性能较强的材料

对于难于免蚀的区域可采用抗蚀性能较强的材料作护面，如

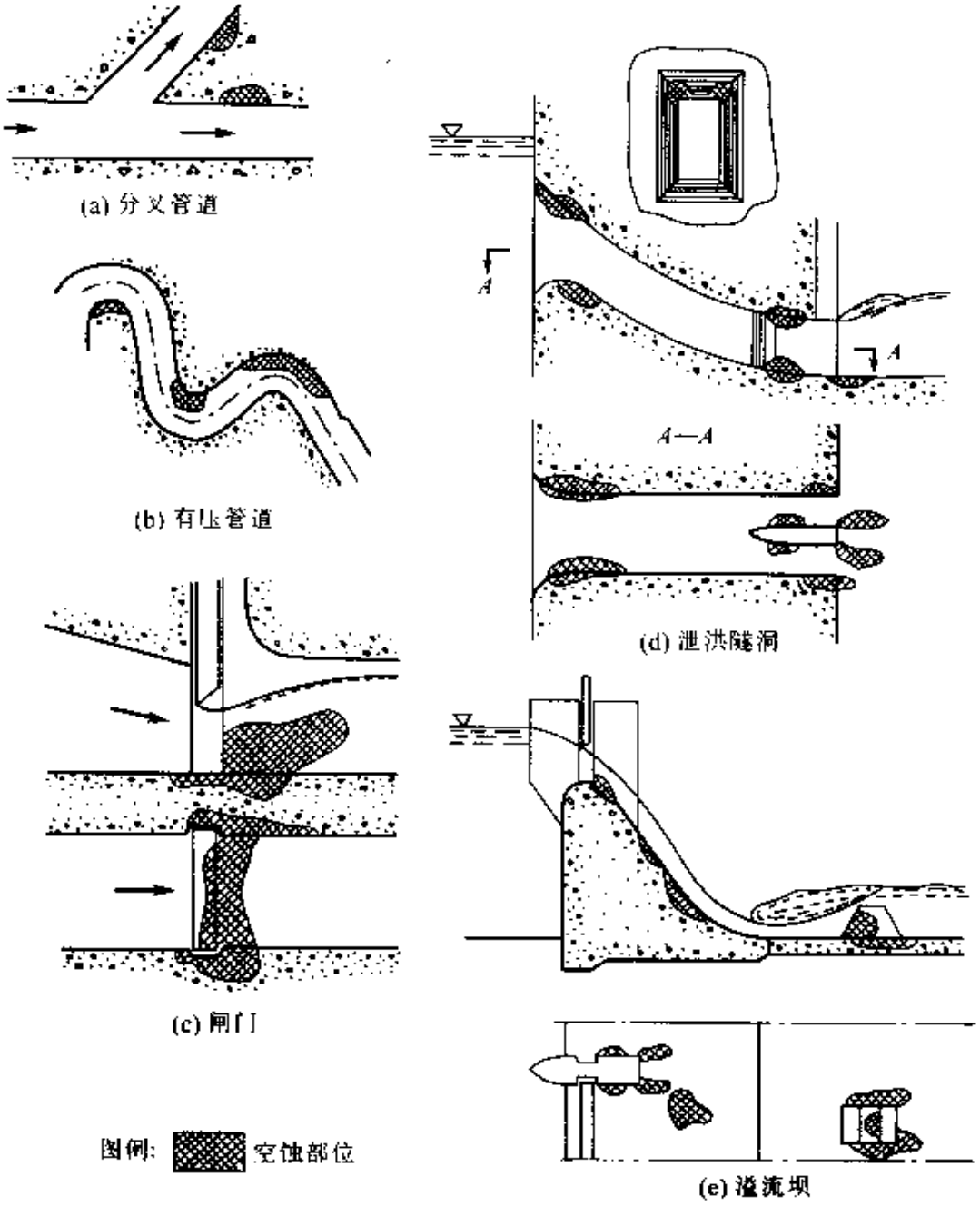


图 15.5

采用钢板、环氧树脂加填充料(如石英粉、砂、橡皮粉等)、工业橡皮等。

3. 负压区通气

在可能发生空蚀的区域设置通气槽、掺气挑流坎等工程措施,

使水流掺气，负压减小，达到掺气减蚀的目的。

第四节　掺气水流简介

高水头泄水建筑物泄流时，当流速增大到一定程度时，空气就会掺入水中，使水流呈现乳白色的水气混合体，水深显著增加，同时，又有大量水滴散射入大气，这种水气自动混掺的流动称为自掺气水流。此外，从空气中射入水中的射流，以及水跃区、桥墩和闸门槽之后也会出现掺气现象，它们属于强迫掺气水流。强迫掺气水流当水流离开干扰区一段距离后，掺入的气泡会很快地释放掉，而自掺气水流能保持沿流掺气。水流掺气之后形成二相流，使原水流的连续性遭到破坏，由连续介质假说建立的水力学计算方法不再适用，必须根据二相流的特性进行分析研究。

水流掺气有利弊两方面。水流掺气后，水气混合体的体积和水深都比未掺气时增大，因此陡槽边墙高度必须增高，泄水隧洞的洞顶余幅也须增大；掺气水流的水滴被抛射到大气中，使附近区域形成“雾化区”，特别是高坝挑流消能，在下游形成大片“雾化区”，影响交通运输、露天电器设备的管理运行以及附近居民的生活条件等。此外，雾化还使附近水工建筑物的岸坡浸泡，以致影响其稳定性。然而，掺气水流能增强消能效果（如减小水跃的第二共轭水深，影响挑流的挑距等），减轻对下游河床的冲刷。当水流的掺气量达到一定数值时，能减小水流的负压值。因此，目前不少高水头水利枢纽的溢流坝面或溢洪道，有意识地在负压区设置通气设施，以起到掺气减蚀或免蚀的作用。据彼得卡（J.A.Peterka）等试验结果：当水中掺气量在 1.5% ~ 2.5%时，混凝土试件的空蚀破坏显著减少，而通气量达 7% ~ 8%时，空蚀现象基本消失。

掺气产生的原因是由于流速紊动剧烈，当横向脉动流速足以克服水面的表面张力及水流自重时，水滴跃出水面进入空中，当水滴再回落到水中时带入空气，使水流掺气。今以陡槽水流为例说明掺气的发生和发展，如图 15.6(a)所示。水流从水库经溢流堰进

入陡槽，从 A 点开始，边界层沿流增厚，到 B 点紊流边界层发展到水面，此时，如果流速足够大，B 点可以开始掺气，如若流速不够大，要到 C 点才开始掺气，称 C 点为掺气点，相应的断面称为掺气发生断面。C 点的下游，掺气量沿流增加，经过一段距离，掺入的空气量和逸出的空气量平衡时，形成均匀的掺气水流。

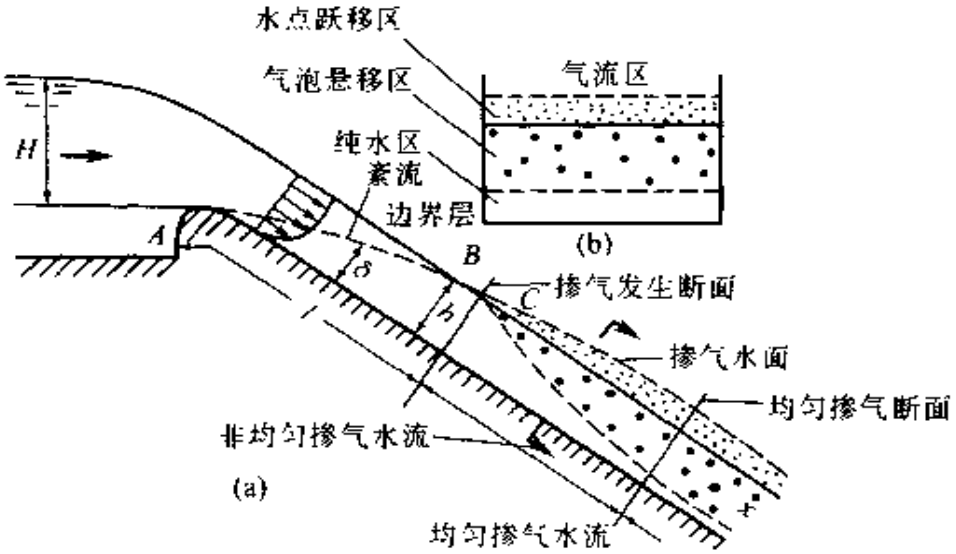


图 15.6

水流掺气以后，在断面上形成液相和气相的二相流。如图 15.6(b)所示，在掺气水流中任取一过水断面，最下面没有掺气的区域称为纯水区；中间区域在水流中悬移着许多气泡，称为气泡悬移区；最上面的区域，在空气中含有许多水滴，称为水点跃移区。若整个断面都掺气，则不存在纯水区。

计算掺气水流的掺气浓度，通常是在掺气水流中某点处取一微小体积，其中空气含量与该体积(即水气混合体体积)的比值称为掺气浓度 C_a。即

$$C_a = \frac{\mathrm{d}V_a}{\mathrm{d}V_{aw}} \tag{15.12}$$

式中 $\mathrm{d}V_{aw}$ 是水气混合体的微小体积，$\mathrm{d}V_a$ 是 $\mathrm{d}V_{aw}$ 中空气的体积。

掺气水流的含水浓度为

$$C_w = \frac{dV_w}{dV_{aw}} \tag{15.13}$$

式中 dV_w 是 dV_{aw} 中水体的体积。由式(15.12)和式(15.13)可得

$$C_a = 1 - C_w \tag{15.14}$$

在自掺气水流中,把某点掺气浓度 $C_a = 0.99$ 以下的深度作为掺气水流的水深,以 h_{aw} 表示。h_{aw} 是确定掺气水流的陡槽边墙高度和泄洪隧洞洞顶余幅的重要参数。国内外许多学者通过原型观测和实验室的试验资料得出不少经验公式,由于观测手段和试验条件不同,所以各家公式对同一问题计算的结果相差甚大。现介绍王俊勇根据国内外 12 个陡槽掺气水流的实测资料得出的计算掺气水深 h_{aw} 的经验公式如下

$$\bar{C}_w = 0.937\left(Fr^2\psi\frac{b}{h}\right)^{-0.088} \tag{15.15}$$

$$h_{aw} = \frac{h}{\bar{C}_w} \tag{15.16}$$

式中 $\bar{C}_w$ 为平均含水浓度,$Fr = \frac{v}{\sqrt{gh}}$,$\psi = \frac{n\sqrt{g}}{R^{1/6}}$,$h$,$R$,$v$ 分别为不掺气水流的水深,水力半径和断面平均流速,b 为底宽,n 为糙率,g 为重力加速度。

运用上式计算陡槽的掺气水深时,一般需已知陡槽的底坡 i、糙率 n、槽底宽 b(设断面为矩形)以及通过的流量 Q。计算时可假定水流为均匀流,以正常水深为 h,并以此求出相应的水力半径 R,断面平均流速 v,$Fr = \frac{v}{\sqrt{gh}}$ 及 ψ 值,最后求 $\bar{C}_w$ 和掺气水深 h_{aw}。

最后介绍一些冲击波的概念。当水流为急流时,如果渠道不顺直,例如渠道具有弯段、收缩段、扩散段或渠壁不平整时,渠中急流受到它们的干扰就会产生向下游传播的干扰波,称为冲击波。关于冲击波的计算可参考有关文献,本书从略。此外,前面已经提到,对于高速水流形成的负压,为了减少空蚀危害,常采用通气减蚀的措施,例如在溢洪道上设置一定数量的挑坎或通气槽等。如果渠中是高速水流,就有可能同时出现冲击波和掺气水流,对于

这种复杂的水流现象，往往难于在理论上予以求解，而应根据具体情况进行研究。

习　题

15.1　由陡槽底部某一点的动水脉动压强过程，经分析计算，得出其方差 $D_p = 2.48\ m^2$（脉动压强用水柱高表示）求其标准差。

15.2　试证明当 $\tau = 0$ 时的相关函数 $R(0) = D$（D 为方差）。

15.3　有一高水头泄洪隧洞，工作闸门后为明流，当打开闸门到某一开度时，收缩断面水深为 0.30 m，平均流速为 24 m/s，水温为 15℃，试求收缩断面底部水流的空穴数 K。

15.4　有一陡槽，底坡 $i = 0.50$，横断面为矩形，底宽 $b = 0.4572$ m，糙率 $n = 0.0106$，流量 $Q = 0.1473\ m^3/s$，求掺气水深 h_{ac}。

第十六章　挟沙水流基础

第一节　概　述

全世界每年土壤侵蚀量约 4900 亿 kN，输入海洋的泥沙约 1470 亿 kN，中国每年土壤侵蚀量约 490 亿 kN，入海泥沙约 166.6 亿 kN。世界大江大河中悬移质年输沙量超过 9.8 亿 kN 的有 13 条，黄河年输沙量 156.8 亿 kN，平均含沙量 368.5 N/m^3，长江年输沙量 46.8 亿 kN，平均含沙量 5.3 N/m^3，亚马逊河年输沙量 39.2 亿 kN，平均含沙量 0.69 N/m^3，恒河年输沙量 142.2 亿 kN，平均含沙量 38.4 N/m^3，密西西比河年输沙量 33.7 亿 kN，平均含沙量 5.88 N/m^3。黄河总沙量和平均含沙量均居首位，实测最大含沙量 8928 N/m^3，黄河中游的一些支流的含沙量更在干流之上。河流挟沙引起河床的演变、阻力的变化等，因之在多沙河流上修建水利工程必须考虑泥沙问题。

第二节　浑水的特性

一、泥沙的性质

1. 粒径和级配

大至巨大的孤石，小至沙土、粘土统称为泥沙。泥沙颗粒的几何尺度理论上以等容粒径表示，等容粒径是体积与沙粒体积相等的球体直径，设沙粒体积为 V，则等容粒径为

$$d = \left(\frac{6V}{\pi}\right)^{1/3} \tag{16.1}$$

筛析法是简捷决定泥沙大小的方法，可以得出泥沙的粒径介

于上、下筛孔大小之间，称为筛径。细沙以下，颗粒大小用沉降法量测，通过量测泥沙的沉速，再反求与该颗粒比重相同、沉速相等的球体的直径，称为沉径。

泥沙不可能是均一的，而是由大小不一的颗粒组成，可通过颗粒分析求出沙样小于不同粒径的重量，绘制出颗粒级配曲线，如图16.1所示。由级配曲线可得出沙样粒径的大小和均匀程度，如沙样Ⅱ比沙样Ⅰ细，沙样Ⅰ比沙样Ⅱ均匀得多。

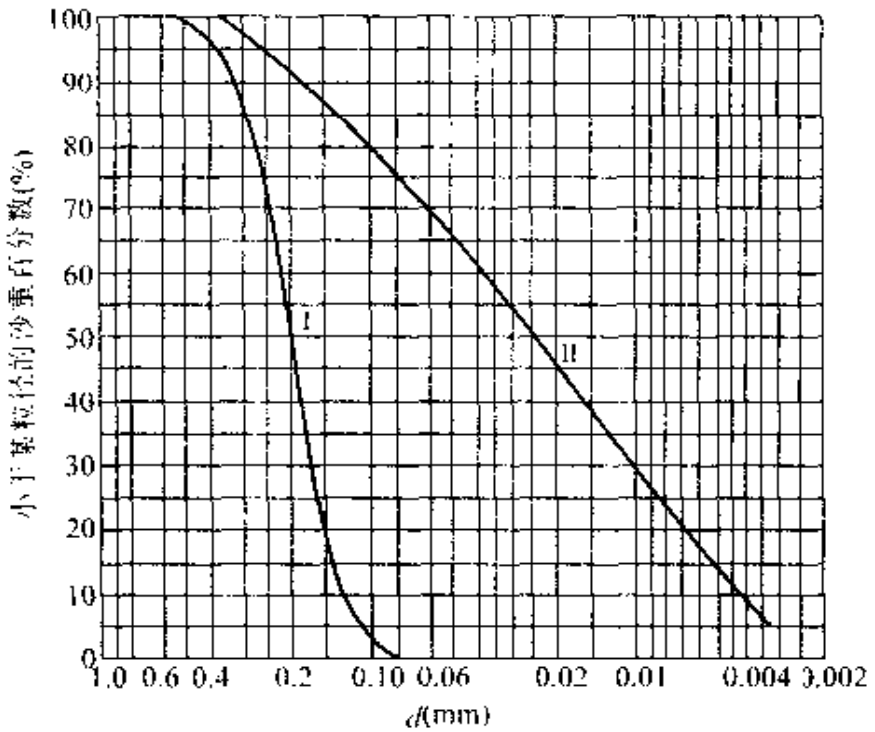


图 16.1

从级配曲线上，对某一粒径值可以查出小于该粒径的泥沙在总沙样中所占的重量百分数，并以该百分数作为该粒径的下标，如d_{90}、d_{50}、d_{25}等，d_{50}是十分重要的特征值，称为中值粒径，代表大于或小于这一粒径的泥沙重量相等。另一个特征值是沙样的平均粒径，把沙样按粒径大小分成 n 组，d_i 为任一组 i 的粒径，p_i 为 i 组的重量百分数，则沙样的平均粒径 d_m 为

$$d_m = \sum_{i=1}^{n} p_i d_i \tag{16.2}$$

沙样的均匀程度也是一个有用的特征值，可用下式计算

$$\varphi = \sqrt{\frac{d_{75}}{d_{25}}} \tag{16.3}$$

φ 为不均匀系数，$\varphi = 1$ 可认为沙样均匀，φ 愈大沙样愈不均匀。

2. 泥沙的密度

单位体积的泥沙质量称为泥沙的密度 ρ_s。由实测资料，不同岩石成份的泥沙密度约在 2550 – 2750 kg/m^3 之间，最常见的为 2650 kg/m^3，故应用上就以 2650 kg/m^3 作为泥沙的密度。

二、浑水的粘滞性

含泥沙的水称浑水，泥沙含量可用含沙量衡量。

1. 浑水含沙量及表达式

浑水中含沙的多少可用含沙量反映，它的表达方式有三种。

体积比含沙量 S_V：

$$S_V = \frac{\text{泥沙所占体积}}{\text{浑水的体积}}$$

重量比含沙量 S_G：

$$S_G = \frac{\text{泥沙所占重量}}{\text{浑水的重量}}$$

混合比含沙量 S：

$$S = \frac{\text{泥沙所占重量}}{\text{浑水的体积}}$$

三种不同表达式之间的关系为

$$S = \rho_s g S_V \tag{16.4}$$

$$S_W = \frac{\rho_s S_V}{\rho + (\rho_s - \rho) S_1} = \frac{S}{\rho + (1 - \frac{\rho}{\rho_s}) S} \tag{16.5}$$

浑水的密度 ρ_m 与含沙量的关系为

$$\rho_m = \rho + (\rho_s - \rho) S_1 = \rho + (1 - \frac{\rho}{\rho_s}) S \tag{16.6}$$

2. 浑水的流型

浑水含沙量的大小及颗粒组成是影响浑水粘滞性的主要因素，含沙量较小的浑水流变特性仍符合牛顿内摩擦定律。

$$\tau = \mu_m \frac{du}{dy} = \rho_m \nu_m \frac{du}{dy} \tag{16.7}$$

式中 τ 为切应力，μ_m、ρ_m、ν_m 分别为浑水的粘滞系数、密度和运动粘滞系数。

当含沙量增大至某一临界值 S_V 时，浑水的流变特性将发生质变，流型由牛顿流体转变为非牛顿流体，高含沙浑水的流变特性可近似按宾汉流体描述。

$$\tau = \tau_B + \eta \frac{du}{dy} \tag{16.8}$$

式中 τ_B 为极限切应力，η 为刚度系数即高含沙浑水的粘滞系数 μ_m。近年来的研究表明，影响 μ_m 值的主要因素是含沙量和泥沙的级配，τ_B、μ_m 的计算方法为

$$\mu_m = \mu\left\{1 - K\frac{S_V}{S_{Vm}}\right\}^{-2.5} \tag{16.9}$$

$$S_{Vm} = 0.92 - 0.2\lg\Sigma\left(\frac{p_i}{d_i}\right) \tag{16.10}$$

$$K = 1 + 2.0\left(\frac{S_V}{S_{Vm}}\right)^{0.3}\left(1 - \frac{S_V}{S_{Vm}}\right)^4 \tag{16.11}$$

$$\tau_B = 9.8 \times 10^{-2}\exp(B\varepsilon + 1.5) \tag{16.12}$$

式中 μ 为清水粘滞系数，S_V、S_{Vm} 分别为体积比含沙量、极限含沙量，d_i、p_i 分别为某一粒径组的平均粒径及相应的重量百分数，K 为系数，$B = 8.45$，$\varepsilon = \dfrac{S_V - S_{Vc}}{S_{Vm}}$，$S_{Vc}$ 为牛顿流体转变为非牛顿流体的临界含沙量，建议* 以 $\tau_B = 0.5\text{N/m}^2$ 时的含沙量作为 S_{Vc}，

$$S_{Vc} = 1.26S_{Vm}^{3.2} \tag{16.13}$$

---

* 费祥俊，黄河中下游含沙水流粘度的计算模型，泥沙研究，1991 年第 2 期。

μ_m、τ_B 也可用毛细管粘度计量测确定。

第三节　泥沙的沉速

泥沙比水重，水中的泥沙受有效重力作用下沉，开始时下沉速度较小，有效重力大于阻力，泥沙加速下沉，随着下沉速度的增大，阻力增大，当阻力增大至与有效重力相等时，泥沙将等速下沉，泥沙在静止的清水中等速下沉的速度称为泥沙的沉速。

泥沙在静水中下沉时，其运动状态与沙粒雷诺数 $Re_d = \frac{\omega d}{\nu}$ 有关，式中 ω、d 为泥沙沉速和粒径，ν 为水的运动粘滞系数。当 $Re_d < 0.5$ 时属层流沉降状态，泥沙基本上沿垂线下沉，附近的水体不发生紊乱现象，泥沙沉降时受到的阻力可从理论上导出。当 $Re_d > 1000$ 时属紊流沉降状态，泥沙以紊动状态下沉，阻力系数 C_D 与 Re_d 无关。当 Re_d 介于 0.5～1000 之间，属过渡或介流状态。

一、球体的沉速

斯托克斯导出了球体在层流状态下沉降的阻力为

$$F = 3\pi\rho\nu d\omega \tag{16.14}$$

将式(16.14)与阻力公式

$$F = C_D A\rho \frac{\omega^2}{2} \tag{16.15}$$

对比，可得

$$C_D = \frac{24}{Re_d} \tag{16.16}$$

等速沉降时，阻力 F 与球体有效重力 G 相等。

$$G = (\rho_s - \rho) g \frac{1}{6}\pi d^3 \tag{16.17}$$

可得

$$\omega = \frac{1}{18}\frac{\rho_s - \rho}{\rho} g \frac{d^2}{\nu} = \frac{1}{18}\frac{(\rho_s - \rho) g}{\mu} d^2 \tag{16.18}$$

当 $Re_d > 1000$ 时，C_D 为常数，$C_D = 0.45$，可得紊流状态下的沉速为

$$\omega = 1.72\sqrt{\frac{\rho_s - \rho}{\rho}gd} \tag{16.19}$$

当 $0.5 < Re_d < 1000$ 时，沉速需用试算法确定，为避免试算麻烦，沙玉清采用只含沉速 ω 的沉速判数 S_a 和只含粒径的粒径判数 Φ，并建立 S_a 与 Φ 的关系来解决过渡状态的沉速计算*。

$$S_a = \frac{\omega}{g^{1/3}\left(\frac{\rho_s - \rho}{\rho}\right)^{1/3}\nu^{1/3}} \tag{16.20}$$

$$\Phi = \frac{g^{1/3}\left(\frac{\rho_s - \rho}{\rho}\right)^{1/3}d}{\nu^{2/3}} \tag{16.21}$$

$$(\lg S_a + 3.665)^2 + (\lg\Phi - 5.777)^2 = 39 \tag{16.22}$$

已知 d，由式(16.21)求出 Φ，若 $\Phi > 1.554$，则沉降处于过渡区，由式(16.22)求出 S_a，再由式(16.20)求出相应于 d 的沉速 ω，为简化沉降中流态的判别，一般以 $d < 0.1$ mm 的泥沙沉降属层流状态，$d > 1.5$ mm 的泥沙沉降属紊流状态，0.1 mm $< d <$ 1.5 mm 的泥沙沉降属过渡状态。

二、泥沙的沉降

球体沉降的阻力规律也适用于泥沙的沉降，如层流区阻力与 $\rho\nu d\omega$ 成正比，紊流区阻力与 $\rho d^2\omega^2$ 成正比，只是由于泥沙不是球体，阻力系数应有不同而已。

张瑞瑾根据阻力叠加原则，认为过渡区内阻力 F 为**

$$F = K_2\rho\nu d\omega + K_3\rho d^2\omega^2 \tag{16.23}$$

有效重力 G 为

$$G = K_1(\rho_s - \rho)gd^3 \tag{16.24}$$

---

* 沙玉清，泥沙运动学引论，中国工业出版社，1965 年。
** 武汉水利电力学院，河流泥沙工程学，水利出版社，1981 年。

式中 K_1、K_2、K_3 分别为泥沙的体积系数和形状系数。令 $F = G$，并选择精度较高、测量因素齐全的资料确定式中的系数，得出过渡区泥沙沉速公式为

$$\omega = \sqrt{(13.95\frac{\nu}{d})^2 + 1.09\frac{\rho_s - \rho}{\rho}gd} - 13.95\frac{\nu}{d} \quad (16.25)$$

层流区($d < 0.1$mm)泥沙沉速公式为

$$\omega = 0.039\frac{\rho_s - \rho}{\rho}\frac{d^2}{\rho} \quad (16.26)$$

紊流区泥沙沉速公式为

$$\omega = 1.04\sqrt{\frac{\rho_s - \rho}{\rho}gd} \quad (16.27)$$

由于泥沙的粒径一般按等容粒径、沉径、筛径计算，所以仍可用球体沉速公式计算泥沙的沉速，规范规定层流区按斯托克斯公式，过渡区按沙玉清公式。

三、含沙量对沉速的影响

实际问题中水流是流动的，水中含盐或泥沙，水质也不同。这些将对泥沙的沉速产生影响，实践说明含沙量对泥沙沉速的影响是主要的，又是工程中最常遇到的。

含沙量较小时，泥沙可以看作是自由沉降，彼此间没有干扰，当含沙量增大至一定值后，相互的干扰就不可忽视，含沙量对沉速的影响，与粒径粗细的关系甚大。含沙量较高时，粗颗粒以分散状下沉，浑水的粘性因粗粒含量的增加改变甚小，含沙量对沉速的影响主要是粗粒下沉时造成附生的向上水流使沉速减小。细颗粒下沉时附生水流影响甚小，但会产生絮凝现象，絮凝作用使沉速增加，而浑水的粘性因细颗粒含量的增加而增大使沉速减小，含沙量对细颗粒沉速的影响表现为两者的综合作用。含沙量高时，不论是粗颗粒或是细颗粒，含沙量对沉速的影响主要表现为浑水粘性的增大，使泥沙尤其是细颗粒的沉速显著减小，一般认为无粘性沙

为粗颗粒，粘性较大或有一定粘性的粘土为细颗粒。

含沙量对泥沙沉速的影响是很复杂的问题，目前研究得很不够。从工程实践讲，遇到的是有一定粗、细颗粒含量的非均匀沙浑水悬浮液，浑水的含沙量和粒径级配是已知的，可按式(16.1)计算浑水的粘滞系数 μ_m，除以 ρ_m 可得浑水的运动粘滞系数 ν_m。将非均匀沙分组，各组的粒径为 d_i，所占的重量百分数为 p_i，用求得的 μ_m、ν_m、ρ_m 替换式(16.18)或式(16.20)、(16.21)、(16.22)中的 μ、ν、ρ，求得分组沉速 ω_{mi}，再按 $\omega_m = \Sigma p_i \omega_i (1 - S_v)^{4.91}$ 求出该非均匀沙浑水悬浮液考虑了含沙量影响的群体沉速。从工程泥沙角度考虑可简便地按含沙量 1960 N/m^3 作为高、低含沙量的分界值，当含沙量大于分界值时，应考虑含沙量对沉速的影响。

例 16.1 某河流水文站实测的洪水平均含沙量 $S = 6.94$ kN/m^3，平均泥沙级配如下表，测验时水温 $t = 20$℃，求该粒径组泥沙的平均沉速。

d_i(mm)	p_i	d_i(mm)	p_i
< 0.005	0.055	0.05 ~ 0.10	0.201
0.005 ~ 0.01	0.017	0.10 ~ 0.25	0.166
0.01 ~ 0.025	0.053	0.025 ~ 0.50	0.241
0.025 ~ 0.05	0.130	0.50 ~ 1.00	0.137

解： (1)根据泥沙级配可求得

$$\Sigma \frac{p_i}{d_i} = \frac{0.055}{0.005 \times 0.8} + \frac{0.017}{0.0075} + \frac{0.053}{0.0175} + \frac{0.13}{0.0375} + \frac{0.201}{0.075} + \frac{0.166}{0.175} + \frac{0.241}{0.375} + \frac{0.137}{0.75} = 27$$

上式中第一项 $\frac{p_i}{d_i}$ 计算之所以除以 0.8，是由于水文测验资料刊出的最小粒径只到 $d = 0.005$ mm 或是 $d = 0.007$ mm，对于较细的级配 $d < 0.005$ mm 往往尚占相当的重量百分数，若将 $d < 0.005$ mm 的全部泥沙都按 $d = 0.005$ mm 来计

算$\frac{p_i}{d_i}$，会带来误差，故除以0.8。

(2)求S_{Vm}、S_{Vo}和μ_m。

$$S_{Vm} = 0.92 - 0.2\lg\Sigma\frac{p_i}{d_i} = 0.92 - 0.2\lg27 = 0.634$$

$$S_{Vo} = 1.26S_{Vm}^{3.2} = 0.293$$

本例中，因$S_{Vo} > S_V = \frac{S}{\rho_s g}$，所以$\tau_B = 0$。

$$K = 1 + 2(\frac{S_V}{S_{Vm}})^{0.3}(1 - \frac{S_V}{S_{Vm}})^4$$

$$= 1 + 2(\frac{0.267}{0.634})^{0.3}(1 - \frac{0.267}{0.634})^4 = 1.173$$

$$\mu_m = \mu(1 - K\frac{S_V}{S_{Vm}})^{-2.5} = 0.001(1 - 1.173\frac{0.267}{0.634})^{-2.5}$$

$$= 0.0055\ \mathrm{N \cdot s/m^2}$$

(3)求分组沉速ω_{mi}。

$$d_i = 0.005\mathrm{mm}$$

$$\rho_m = \rho + (\rho_s - \rho)S_V = 1000 + (2650 - 1000)0.267$$

$$= 1440\ \mathrm{kg/m^2}$$

$$\omega_{mi} = \frac{\rho_s - \rho_m}{18\mu_m}d_i^2 = \frac{(2650\ \mathrm{kg/m^3} - 1440\ \mathrm{kg/m^3})981}{18 \times 0.0055}(0.00005)^2$$

$$= 0.00000299\mathrm{m/s} = 0.000299\mathrm{cm/s}$$

同理可得

d_i(mm)	0.0075	0.0175	0.0375	0.075
ω_{mi}(cm/s)	0.000673	0.00367	0.0168	0.0673

$d_i = 0.175$mm时，沉降有可能处于过渡区，故计算粒径判数Φ

$$\Phi = \frac{g^{1/3}(\frac{\rho_s}{\rho_m} - 1)^{1/3}d}{\nu_m^{2/3}}, \qquad \nu_m = \frac{\mu_m}{\rho_m} = 0.038\mathrm{cm^2/s}$$

$$\Phi = \frac{981^{1/3}\left(\frac{2650}{1440}-1\right)^{1/3}0.0175}{0.038^{2/3}} = 1.45$$

$\Phi < \Phi_c = 1.554$ 故沉降仍处于层流区。

$$\omega_{mi} = \frac{(\rho_s - \rho_m)g}{18\mu_m}d_i^2 = 0.376\text{cm/s}$$

$d_i = 0.375$mm 时，沉降已处于过渡区。

$$\Phi = \frac{981^{1/3}\left(\frac{2650}{1440}-1\right)^{1/3}\times 0.0375}{0.038^{2/3}} = 3.107$$

$$S_a = anti\lg\{\sqrt{39-(\lg\Phi - 5.777)^2} - 3.665\}$$

$$= anti\lg(-0.3375) = 0.46$$

$$S_a = \frac{\omega_{mi}}{\nu_m^{1/3}g^{1/3}\left(\frac{\rho_s}{\rho_m}-1\right)^{1/3}}$$

$$= \frac{\omega_{mi}}{3.148}$$

$$\omega_{mi} = 3.148 \times 0.46 = 1.447\text{cm/s}$$

同理可得 $d_i = 0.75$ mm 的分组沉速 $\omega_{mi} = 3.95$ cm/s

(4)求泥沙群体沉速 ω_m

$$\omega_m = \Sigma p_i\omega_{mi}(1-S_v)^{4.91} = 0.055 \times 0.000299 + 0.017 \times 0.000673 + 0.053 \times 0.00367 + 0.13 \times 0.0168 + 0.201 \times 0.0673 + 0.166 \times 0.367 + 0.241 \times 1.447 + 0.137 \times 3.95 \times \left[1 - \frac{6.94}{25.97}\right]^{4.91} = 0.21\text{cm/s}$$

第四节　推移质运动

泥沙在水中的运动状态可以分为两类，一类是泥沙沿河床滚动、滑动或局限于床面附近的跳跃前进，运动和停止呈间歇性，沙粒的前进速度比水流速度小得多，这一类泥沙叫推移质。另一类

泥沙在水中悬浮前进，顺水流的前进速度与水流的速度基本相同，这一类泥沙叫悬移质。

一、泥沙的起动

确定泥沙从静止进入运动状态的临界水流条件是重要的，为此，先分析泥沙起动的物理图形。

1. 泥沙起动的随机性

分析位于群体中某一个沙粒 A 的受力情况，如图 16.2，为简

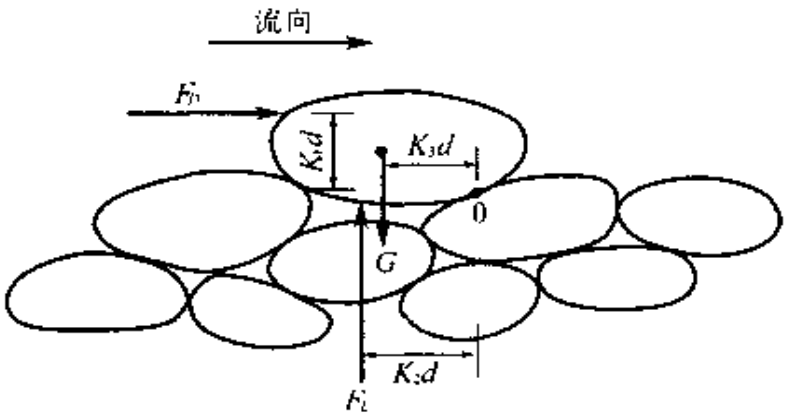


图 16.2

扼地说明问题，假设颗粒间不存在粘结力，当水流经过沙粒 A 附近时发生绕流，水流给沙粒的力可分解为沿水流方向的推力 F_D 和垂直水流方向的举力 F_L，若以 u_b 代表作用于沙粒流层的瞬时流速，则

$$F_D = C_D\alpha_1 d^2\rho\frac{u_b^2}{2} \tag{16.28}$$

$$F_L = C_L\alpha_2 d^2\rho\frac{u_b^2}{2} \tag{17.29}$$

式中 C_D、C_L 为推力及举力的阻力系数，α_1、α_2 为垂直于水流方向及平行于水流方向的沙粒面积系数。

沙粒在水中的有效重力即净重为

$$G = \alpha_3(\rho_s - \rho)gd^3 \tag{16.30}$$

式中 α_3 为沙粒的体积系数。

若沙粒以滚动形式起动，则以 O 点为转动中心，沙粒起动的临界条件为

$$K_1 dF_D + K_2 dF_L = K_3 dG \tag{16.31}$$

将式(16.28)、(16.29)、(16.30)代入上式整理得临界起动底速 u_{bc} 为

$$u_{bc} = \left(\frac{2K_3\alpha_3}{K_1 C_D \alpha_1 + K_2 C_L \alpha_2}\right)^{1/2} \sqrt{\frac{\rho_s - \rho}{\rho} gd} \tag{16.32}$$

若沙粒以滑动或跳跃形式起动，则临界条件的主要变量函数关系仍和式(16.32)一致。

因沙粒形状、大小及其所处的位置是随机的，从而 α_1、α_2、α_3、K_1、K_2、K_3 都是随机变量，u_{bc} 也是随机变量，说明了起动是一种随机现象，要具体确定起动的临界条件必须对影响泥沙起动的随机变量的取值作出明确的规定，这在目前还未能解决，只好根据泥沙所表现出的状态来规定起动标准，即将部分床面有少量泥沙在运动这样一种状态规定为起动标准。

沙粒起动的临界水流条件可由起动流速、起动拖曳力和起动功率三种形式表示。

2. 无粘性均匀沙的起动流速

起动底速难以测定，可根据流速分布公式用平均流速 v 来代替起动底速，若用指数流速分布公式。

$$u = u_H \left(\frac{y}{H}\right)^m \tag{16.33}$$

式中 u_H 为 $y = H$ 处的流速，H 为水深，u 为距河底为 y 处的流速，m 为指数。

根据式(16.33)可求得平均流速为

$$v = \frac{u_H}{H}\int_0^H \left(\frac{y}{H}\right)^m \mathrm{d}y = \frac{u_H}{1+m} \tag{16.34}$$

将式(16.34)回代到式(16.33)，得

$$u = (1 + m)v\left(\frac{y}{H}\right)^m \tag{16.35}$$

若取 $y = \alpha d$ 处的流速作为水流作用于沙粒的流速值，则得出

$$u_b = (1 + m)\alpha^m v\left(\frac{d}{H}\right)^m \tag{16.36}$$

将式(16.36)代入式(16.32)，即得到以起动流速表达的泥沙起动的临界水流条件。

$$v_0 = \eta\sqrt{\frac{\rho_s - \rho}{\rho}gd}\left(\frac{H}{d}\right)^m \tag{16.37}$$

式中 v_0 为泥沙起动时的垂线平均流速，称为起动流速，η 为综合系数。

$$\eta = \frac{1}{(1 + m)\alpha^m}\left(\frac{2K_3\alpha_3}{K_2C_D\alpha_1 + K_2C_L\alpha_2}\right)^{1/2} \tag{16.38}$$

当前还不能准确的定量 η 值，只有根据起动流速的试验资料来反推 η 的数值。

沙莫夫(Г.И.Шамов)根据试验资料推求得 $\eta = 1.14$，$m = \frac{1}{6}$，从而得起动流速公式为

$$v_0 = 1.14\sqrt{\frac{\rho_s - \rho}{\rho}gd}\left(\frac{H}{d}\right)^{1/6} \tag{16.39}$$

沙莫夫公式的单位为 m、s，它适用于 $d > 0.15 \sim 0.20$mm 的非粘性散粒体泥沙。

冈恰洛夫采用对数流速分布公式，经同样的推求得起动流速公式为

$$v_0 = 1.07\lg\frac{8.8H}{d_{95}}\sqrt{\frac{\rho_s - \rho}{\rho}gd} \tag{16.40}$$

若散粒体泥沙较细，应考虑近壁层流层对沙粒淹没的影响，中国李保如的研究有一定代表性。他的研究得出 η 不是常数而是雷诺数 $\frac{vd}{\nu}$ 和相对糙率 $\frac{d}{R}$ 的函数。

3. 无粘性均匀沙的起动拖曳力

泥沙起动的根源是泥沙受到水流的拖曳力即剪切力，因此用拖曳力作为起动的临界水流条件是很直观的。泥沙处于起动状态的床面剪切力即起动拖曳力为

$$\tau_c = \rho g h J = \rho u_{*c}^2 \tag{16.41}$$

把 u_{*c} 和流速分布联系起来，通过起动底速公式就可导出临界拖曳力公式。采用概括光滑床面、粗糙床面和过渡区流速分布公式的对数流速分布公式为

$$\frac{u}{u_*} = 5.75\lg\left(30.2\frac{\gamma\chi}{K_s}\right) \tag{16.42}$$

式中 K_s 为河床糙度。若河床组成为均匀沙，$K_s = d$；若为非均匀沙，$K_s = d_{65}$。χ 为校正系数，$\chi = f\left(\frac{K_s}{\delta}\right)$，$\delta$ 为近壁层流层厚度。

取 $y = \alpha K_s$，求得起动底速为

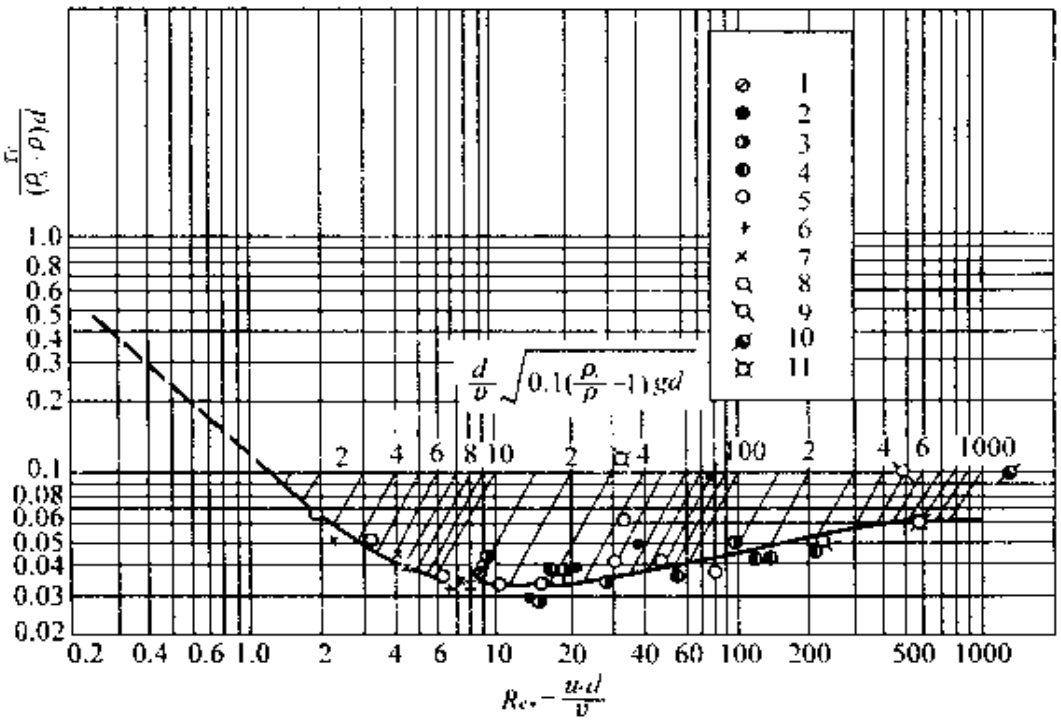
$$u_{bc} = [5.75\lg(30.2\alpha\chi)]u_{*c} \tag{16.43}$$

将式(16.43)代入式(16.32)，整理得

$$\frac{\frac{u_{*c}^2}{\frac{\rho_s-\rho}{\rho}gd}}{} = \frac{\tau_c}{(\rho_s-\rho)gd} = \psi \tag{16.44}$$

式中 u_{*c} 为起动摩阻流速，τ_c 为起动拖曳力，ψ 为综合系数，$\psi = f\left(\frac{u_* d}{\nu}\right)$。

式(16.44)就是希尔兹起动拖曳力公式，图 16.3 是希尔兹利用不同比重的泥沙得到的试验结果。希尔兹曲线呈马鞍形，在 $\frac{u_* d}{\nu} = 10$ 附近，即近壁层流层厚度 δ 与床沙粒径 d 接近，$\frac{\tau_c}{(\rho_s-\rho)gd}$ 最小，$\frac{u_* d}{\nu} > 500$，$\frac{\tau_c}{(\rho_s-\rho)gd}$ 接近常数，其值约为 0.06。工程问题中，一般用 $\frac{\tau_c}{(\rho_s-\rho)gd} = 0.06$ 来决定起动条件。



1—琥珀(Shields)比重(下同)1.06;2—褐煤(Shields)1.27;3—花岗石(Shields)2.70;
4—盘晶石(Shields)4.25;5—沙(Casey)2.65;6—沙(Kramer)2.65;
7—沙(U.S.Wes)2.65;8—沙(Gilbert)2.65;9—沙(White)2.61;
10—沙,在空气中(White)2.10;11—钢球(White)7.90

图 16.3

起动流速和起动拖曳力是两种表达泥沙起动的临界水流条件的形式。它们可以互相转化,但是考虑问题的出发点是不同的。起动拖曳力表达形式直观,但它没有反映上举力和糙率的影响,且决定起动拖曳力需要水面比降 J,而 J 的测量精度较差。起动流速表达形式不够直观,采用不同流速分布得出的起动流速有一些差别,但起动流速易于测量,且考虑了糙率和上举力的影响,因此,目前一般多采用起动流速作为泥沙起动的表达形式,至于起动功率的表达形式应用得更少,不再叙述。

4. 粘性均匀泥沙的起动流速

试验表明粘性泥沙粒径虽小但起动流速较大,粘性泥沙的粒

径愈小起动流速愈大。这现象是不能用近壁层流层的掩盖影响作出解释的，而只能用粘性泥沙的粘结力影响来解释。影响粘结力的物理化学因素复杂，只作些简述。

张瑞瑾的研究* 认为粘结力是由于存在于颗粒间的吸着水和薄膜水不传递静水压力引起的，经分析推论并用较广泛的试验资料确定有关系数，得出如下的起动流速公式

$$v_0 = \left(\frac{h}{d}\right)^{0.14}\left(17.6\frac{\rho_s-\rho}{\rho}d + 0.000000605\frac{10+h}{d^{0.72}}\right)^{1/2} \tag{16.45}$$

式(16.45)中的单位取 m、s、N，这个公式是根据粘性泥沙的起动条件导出的，但由于泥沙粒径较大时，括号中的第二项即反映粘结力影响项的值很小，与第一项相比可以略去不计，而公式中确定系数时所使用的资料又包括了范围较广的各种粒径资料，因此式(16.45)对粗、细沙都能适用。这个公式的图形呈马鞍形，如在水深 $h = 0.15$ m 情况下，最小的起动流速出现在 $d \approx 0.17$ mm 处，当 $d > 0.17$ mm，粒径愈大，起动流速愈大；当 $d < 0.17$ mm，粒径愈小，起动流速愈大，这说明对前者重力作用占主要地位，粒径愈大愈不易起动，对后者粘结力起主要作用，粘径愈小愈不易起动。一般当 $d > 2$ mm 时，可略去式中第二项，并取 $\frac{\rho_s-\rho}{\rho} = 1.65$，则式简化为

$$v_0 = 5.39h^{0.14}d^{0.36} \tag{16.46}$$

式中单位取 m·s，这和沙莫夫公式(16.39)类似。

以上分析了均匀沙的起动问题，对于非均匀沙问题就更复杂了，这是由于非均匀沙中的较细颗粒受到粗颗粒的掩护，其起动流速较均匀沙相应的颗粒大，而非均匀沙中的粗颗粒由于突出于床面之上受力较大，其起动流速要较均匀沙的相应颗粒小。对一般的冲积河流，粗的和很细的颗粒含量小，用中值粒径 d_{50} 代替 d 来

* 武汉水利电力学院．河流泥沙工程学．水利出版社，1981 年．

计算非均匀沙的起动流速是基本符合实际的。

以上所述的起动流速公式都是在床面水平条件下导出的，对于斜坡上的泥沙起动流速问题必须考虑沿斜坡方向的重力分力，一般来说河流的床面坡度小，可以不计重力分力作用，按以上各式计算泥沙的起动流速。

例 16.2 某水库下泄清水，若泄流量 $Q = 500\ \mathrm{m^3/s}$，下游河道宽 $b = 200\ \mathrm{m}$，过水断面面积为 $500\ \mathrm{m^2}$，床沙平均粒径 $d = 5.6\ \mathrm{mm}$，试求河床将冲深多少？

解： 因为 $d = 5.6\ \mathrm{mm}$ 是粗颗粒，可用下式计算起动流速。

$$v_0 = 5.39 h^{0.14} d^{0.36}$$

把 $h = \dfrac{500}{200} = 2.5\ \mathrm{m}$，$d = 5.6\ \mathrm{mm} = 0.0056\ \mathrm{m}$ 代入得

$$v_0 = 5.39 \times 2.5^{0.14} \times 0.0056^{0.36} = 0.945\ \mathrm{m/s}$$

设冲刷后河床的水深为 $h + \Delta h$，则

$$h + \Delta h = \frac{Q}{b \cdot v_0} = \frac{500}{200 \times 0.945} = 2.65\ \mathrm{m}$$

故得河床冲深

$$\Delta h = 2.65\ \mathrm{m} - 2.5\ \mathrm{m} = 0.15\ \mathrm{m}$$

二、冲积河流的阻力

河床的形态是水流和床身相互作用的产物，床面形态与水流强度大小有关，一平整床面，随着水流强度的不断增大，将经历波长 30～40 cm、高度不超过 3～4 cm 的沙纹形态，继而经历波长几百米、高度 1～3 m 的沙垄形态，继而出现动平整床面形态，水流强度再继续增大，则床面又将出现不平整。

冲积河流的阻力与床面形态有关。在一定的比降下，流量是影响水流强度的主要因素，实测资料说明流量增大，冲积河流的综合糙率减小。工程计算中，点绘流量与糙率的关系曲线可简捷地处理冲积河流的阻力计算。

三、推移质输沙率

单位时间内通过河流过水断面单位河宽的推移质数量称为推移质输沙率 q_s。由于影响推移质输沙率的因素很多，对推移质输移规律认识不充分，再加上天然河流中实测推移质输沙率非常困难，测量精度又差，因而推移质输沙率的研究是一个解决得较差的课题。

我们仅介绍在大量实验研究基础上推得的在工程中常用的推移质输沙率公式。

1. 均匀推移质输沙率

一些学者认为影响推移质输沙率的主要因素是水流流速，流速大推移质输沙率就大，常用的经验公式有

沙莫夫(Г.И.Шамов)公式

$$q_s = 9.31 d^{1/2}(v - v_0')\left(\frac{v}{v_0'}\right)^3\left(\frac{d}{h}\right)^{1/4} \tag{16.47}$$

式中 v、v_0' 分别为平均流速和止动流速 $v_0' = \frac{1}{1.2}v_0$，d 为粒径，h 为水深，式中 q_s 的单位为 N/m·s。沙莫夫指出，对 $d < 0.2$mm 的泥沙，不能用式(16.47)计算推移质输沙率，式(16.47)的资料范围为 $d = 0.2 \sim 0.73$ mm，$13 \sim 65$ mm；$h = 1.02 \sim 3.94$ m，$0.18 \sim 2.16$ m；$v = 0.40 \sim 1.02$ m/s，$0.8 \sim 2.95$ m/s。

一些学者以拖曳力为主要参数推得的经验公式有：

梅叶-彼德用于宽浅河槽的公式

$$q_s = \frac{\left[\left(\frac{n'}{n}\right)^{3/2}\rho g h J - 0.047(\rho_s - \rho)gd\right]^{3/2}}{0.125(\rho)^{1/2}\left(\frac{\rho_s - \rho}{\rho_s}\right)} \tag{16.48}$$

式中 n 为河床糙率，n' 为河床平整情况下的沙粒糙率，梅叶-彼德取 $n' = \frac{1}{26}d_{90}^{1/6}$，有人建议取 $n' = \frac{1}{24}d_{50}^{1/6}$。式(16.48)的单位取 N、m、

s。

梅叶和彼德曾进行过大量室内推移质试验，试验资料范围：水深 $h=1\sim120$ cm，平均粒径 $d=0.4\sim30$ mm，能坡（即水力坡度）$J=0.0004\sim0.02$，流量 $Q=0.0002\sim4$ m^3/s，泥沙密度 $\rho_s=1255\sim4200$ kg/m^3。梅叶-彼德公式使用的试验资料范围较广，且包括了中值粒径达 28.65mm 的卵石试验数据，在公式推导过程中，考虑因素从简单到复杂，一步一步地找出偏差的原因并加以修正，最后得出一般性的推移质输沙率公式，在应用到粗沙及卵石河床时，可靠性较大，是目前常用的公式。

我国一些学者也对推移质输沙率进行过研究，推出了一些计算公式，可参阅有关文献。

2. 非均匀推移质输沙率

非均匀推移质运动中大小不同颗粒之间可有各种不同的影响，问题要复杂得多。若只需估算推移质总输沙率，那末只要确定一个床沙代表粒径，就仍可用式(16.47)、(16.48)来计算非均匀推移质输沙率。

爱因斯坦根据一些河流的实测资料及水槽试验资料，建议床沙代表粒径取 d_{35}。梅叶-彼德建议床沙代表粒径取 $d_m=\Sigma d_i p_i$，钱宁曾以若干水槽试验资料对两种取法作了检验，认为在输沙率不大时，取 d_m 似比 d_{35} 合理，而在输沙率较大时，两种取法差别甚小。

例 16.3 某水库年平均入库流量为 2000 m^3/s，回水末端上游河段在流量 2000 m^3/s 时，相应的河宽 $b=200$ m，断面平均水深 $h=5$ m，水面比降 $J=0.00012$，床沙中值粒径 $d_{50}=2$ mm，试求每年进入水库的推移质量为多少？

解： 分别用沙莫夫公式和梅叶-彼德公式计算。

河段上断面平均流速 $v=\dfrac{2000}{200\times5}=2$ m/s。由沙莫夫起动流速公式可得

$$v_0=1.14\sqrt{\frac{\rho_s-\rho}{\rho}gd}\left(\frac{h}{d}\right)^{1/6}=4.6d^{1/3}h^{1/6}$$

$$=4.6\times(2\times10^{-3})^{1/3}\times5^{1/6}=0.754\ \text{m/s}$$

比降 $J=0.00012$ 甚小，可不考虑斜坡影响，由沙莫夫输沙率公式

$$q_s = 9.31 d^{1/2}(v - v'_0)(\frac{v}{v'_0})^3(\frac{d}{h})^{1/4}$$

$$= 9.31 \times (2 \times 10^{-3})(2 - \frac{0.754}{1.2})(\frac{2 \times 1.2}{0.754})^3(\frac{2 \times 10^{-3}}{5})^{1/4} = 2.63\ \text{N/m} \cdot \text{s}$$

年入库推移质量为

$$q_s bT = 2.63 \times 200 \times 365 \times 24 \times 3600 = 1.66 \times 10^{10}\text{N}$$

由梅叶—彼德公式，以 $n' = \frac{1}{24} d_{50}^{1/6} = \frac{1}{24}(2 \times 10^{-3})^{1/6} = 0.0148$，$n = h^{2/3} J^{1/2} v^{-1} = 5^{2/3} \times (0.00012)^{1/2} \times \frac{1}{2} = 0.016$，$\rho = 1000\ \text{kg/m}^3$，$\rho_s = 2650\ \text{kg/m}^3$，$g = 9.81\ \text{m/s}$代入得

$$q_s = \frac{[(\frac{n'}{n})^{3/2}\rho g h J - 0.047(\rho_s - \rho)gd]^{3/2}}{0.125(\rho)^{1/2}(\frac{\rho_s - \rho}{\rho_s})}$$

$$= \frac{[(\frac{0.0148}{0.016})^{3/2} \times 9800 \times 5 \times 0.00012 - 0.047(25970 - 9800) \times 2 \times 10^{-3}]^{3/2}}{0.125(1000)^{1/2}(\frac{2650 - 1000}{2650})}$$

$$= 2.91\text{N/(m} \cdot \text{s)}$$

年入库推移质量为

$$q_s bT = 2.91 \times 200 \times 365 \times 24 \times 3600 = 1.84 \times 10^{10}\text{N}$$

第五节　悬移质运动

悬浮在水中随水流前进的泥沙叫悬移质，它在水流方向的前进速度与水流流速基本相同，江河输送的泥沙中悬移质占主要部分。

水流中悬移质的比重一般为 2.65，在有效重力的作用下会下沉，它之所以能够被水流远距离输送是因为它还受到水流紊动扩散的作用。一般情况下，水流中单位体积内所含的悬移质数量即含沙量 S 沿水深的分布是上稀下浓，水流紊动扩散作用是把悬移质从含沙量高的区域输送到含沙量低的区域，其结果是把泥沙从

下层带向上层，正是由于重力和紊动扩散的共同作用才使水流长距离地输送悬移质，但这并不是说悬移质永不下沉，事实上有一部分颗粒会下沉到河床成为床沙，而同时又会有一部分床沙在水流的作用下悬浮起来。当重力作用超过紊动扩散作用时，水流中的含沙量将逐渐减少，输移过程表现为淤积；反之，当紊动扩散作用超过重力作用时，含沙量将逐渐增加，输移过程表现为冲刷；若两者相当，水流中的含沙量将保持基本不变，输移过程处于不冲不淤的相对平衡状态。

一、悬移质含沙量沿垂线分布

若泥沙的沉速为 ω，则单位时间内通过垂直于 Z 轴的单位面积的泥沙下沉量为紊动扩散使泥沙向上层扩散的泥沙扩散量为

$$-\varepsilon_{sy}\frac{\partial s}{\partial y} \tag{16.50}$$

当水流输沙处于平衡状态时，重力使泥沙下沉的数量应和紊动使泥沙向上层扩散的量相等。

$$\varepsilon S = -\varepsilon_{sy}\frac{\partial s}{\partial y}$$

即

$$\varepsilon S + \varepsilon_{sy}\frac{\partial s}{\partial y} = 0 \tag{16.51}$$

式(16.51)是二元恒定均匀流中输沙处于相对平衡状态下的悬移质扩散方程，求解式(16.51)就可得到含沙量沿垂线的分布。

要求解式(16.51)，首先应求出 ε_{sy} 沿水深的变化规律，一般可假设 ε_{sy} 等于水流紊动扩散系数 ε，即

$$\varepsilon_{sy} = \varepsilon = \kappa u_* \left(1 - \frac{y}{h}\right) y$$

式中 κ 为卡门常数，h 为水深，u_* 为摩阻流速(又称动力流速)，代入式(16.51)得

$$\omega S + \kappa u_* \left(1 - \frac{y}{h}\right) y \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}y} = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}S}{S} = -\frac{\omega}{\kappa u_*}\frac{\mathrm{d}y}{(1-\frac{y}{h})y} \tag{16.52}$$

将式(16.52)从离河床较小的距离 a 积分到 y，并令 a 处的含沙量为 S_a，则得

$$\ln\frac{S}{S_a} = \frac{\omega}{\kappa u_*}\ln(\frac{h-y}{y}\frac{a}{h-a})$$

或

$$\frac{S}{S_a} = (\frac{\frac{h}{y}-1}{\frac{h}{a}-1})^{\frac{\omega}{\kappa u_*}} \tag{16.53}$$

式(16.53)即为二元恒定均匀流在不冲不淤的相对平衡情况下含沙量沿垂线分布方程。当 ω、u_* 及 S_a 已知时，就可以求出垂线上任意 y 处的含沙量 S。

式(16.53)中的 $Z=\frac{\omega}{\kappa u_*}$ 叫悬浮指标，它代表重力作用的 ω 与代表紊动作用的 κu_* 的对比关系，悬浮指标愈大，重力作用愈强，垂线含沙量分布愈不均匀，反之则愈均匀。图 16.4 是根据式(16.53)以 $Z=\frac{\omega}{\kappa u_*}$ 为参变数得出的不同的相对含沙量垂线分布曲线。当 $Z\geqslant 5$ 时，以悬浮形式运动的泥沙量已很少，当 $Z=0.06$ 时，含沙量的垂线分布已相当均匀。

若悬移质的组成很不均匀，则可以把悬移质按粒径大小分组，按各组的 ω 计算含沙量分布，再将各组相同相对水深的含沙量加起来，就得到总含沙量的分布。

实践证明，在颗粒较细含沙量较小时，式(16.53)与实测资料符合良好，而在颗粒粗含沙量较大时，误差较大，这是因为在推导过程中作了一系列的假设所致，由此可以认为式(16.53)基本上反映了平原河流悬移质的含沙量垂线分布。式(16.53)的另一个问题是计算得出的水面含沙量为零，床面含沙量是无穷大，这是不符

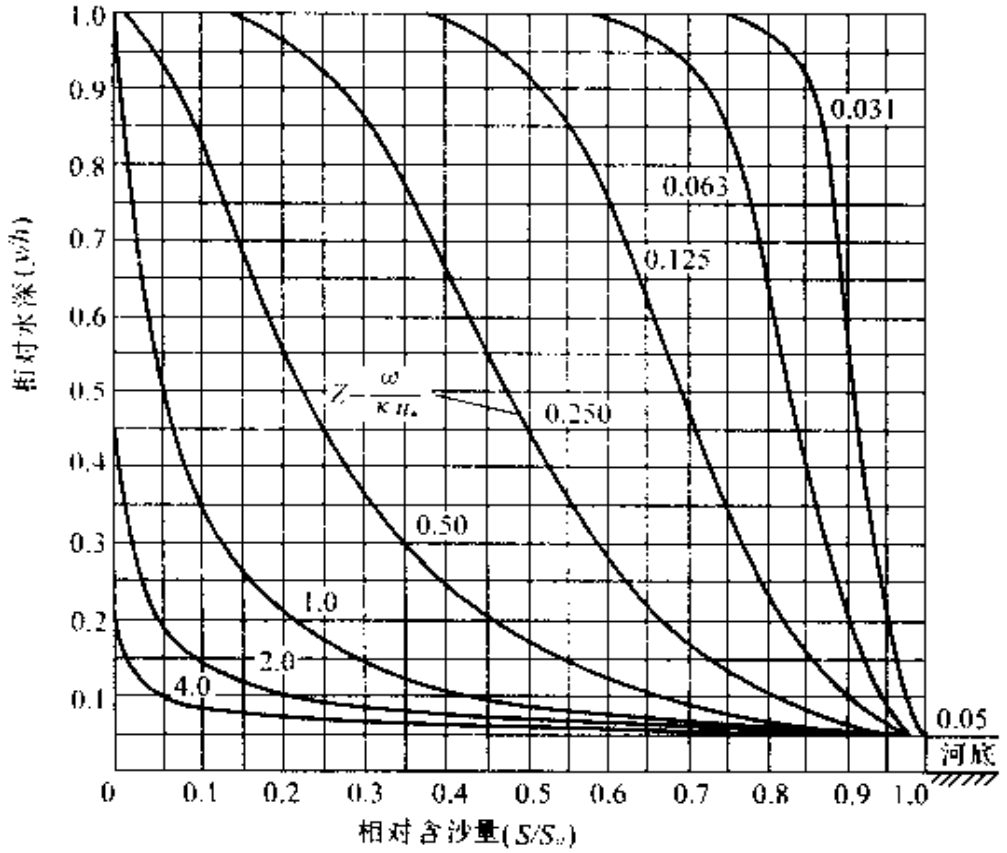


图 16.4

合实际的,说明在靠近河底的地方已属推移质运动范围。

例 16.4 某河道左岸建有一座灌溉引水闸,闸底高出河底 2 m。当河流流量为 1000 m^3/s,河宽为 100 m,水深为 5 m,水温为 20℃时,粒径为 1 mm 的泥沙会不会进入渠道?哪一种粒径的泥沙将会进入渠道?

解: $d = 1$ mm 的泥沙沉速按沙玉清公式计算,$t = 20$℃时,$\nu = 0.0101$ cm^2/s。

$$\Phi = \frac{g^{1/3}\left(\frac{\rho_s - \rho}{\rho}\right)^{1/3} d}{\nu^{2/3}} = \frac{981^{1/3} \times (1.65)^{1/3} \times 0.1}{0.0101^{2/3}} = 25.12$$

$$S_a = anti\ \lg[\sqrt{39 - (\lg\Phi - 5.777)^2} - 3.665)$$

$$= anti\ \lg[\sqrt{39 - (\lg 25.12 - 5.777)^2} - 3.665]$$

$$= anti\ \lg 0.7894 = 6.158$$

由 $S_a=\dfrac{\omega}{g^{1/3}\left(\dfrac{\rho_s-\rho}{\rho}\right)^{1/3}\nu^{1/3}}$，得 $\omega=15.6\ \text{cm/s}=0.156\ \text{m/s}$

设河道断面平均流速即为扬动流速 v_s，则

$$v_s=\frac{1000}{5\times100}=2\ \text{m/s}$$

由 $$v_s=\frac{15.1}{Z}\left(\frac{h}{d}\right)^{1/6}\omega$$

可得 $$Z=\frac{15.1}{v_s}\left(\frac{h}{d}\right)^{1/6}\omega=\frac{15.1}{2}\left(\frac{5}{1\times10^{-3}}\right)^{1/6}\times0.156=4.87$$

由相对水深 $\frac{2}{5}=0.4$ 和 $\frac{\omega}{\kappa u_*}=Z=4.87$ 查图 16.4，可知相对含沙量 $S/S_a=0$，粒径 $d=1\text{mm}$ 的泥沙不会进入渠道。

从该图可知，当 $Z<2.5$ 时，相对水深 0.4 处才会有含沙量分布，由

$$v_s=\frac{15.1}{Z}\left(\frac{h}{d}\right)^{1/6}\omega\ \text{得}\frac{d^{1/6}}{\omega}=\frac{15.1}{2\times2.5}(5)^{1/6}=3.95$$

按沙玉清公式试算得 $d=0.44$ mm，可以认为 $d<0.44$ mm 的泥沙可进入引水闸。

二、悬移质中的冲泻质及床沙质

在冲积河流的若干条垂线上，既对悬移质取沙样又对河床表层取样，并进行颗粒分析，如图 16.5(a)、(b)，图(a)为同一垂线情况，图(b)为几条垂线加权平均后的断面平均情况。由图可见：①悬移质的中值粒径、平均粒径都比床沙的中值粒径、平均粒径小得多；②悬移质粒配曲线具有较明显的最大粒径，却往往没有明显的最小粒径；③悬移质的不均匀性明显大于床沙的不均匀性；④悬移质中较粗的泥沙在床沙中大量存在，而较细的泥沙在床沙中几乎没有。既然悬移质中较细的泥沙是床沙中几乎没有的，那末它是水流从上游流域带来的，基本上来多少带走多少，而且一泻千里，所以把悬移质中较细的泥沙称为冲泻质，而把悬移质中较粗的泥沙称为床沙质。当水流挟带的床沙质超过它所能挟带的数量时，就会落淤；反之，就会冲刷，从河床中补给一部分床沙质，一直达到它所能挟带的数量，冲刷才停止，所以水流中挟带的床沙质总是饱

和的。冲泻质则不然，如果上游的来量高于水流能挟带的限度也会淤积，但来量低于水流能挟带的限度，却无法从河床中取得补给，所以冲泻质多处于不饱和状态。据此，在不冲不淤的相对平衡条件下，水流能挟带床沙质的数量应与水流条件和河床表层组成有关，可由水流条件和河床组成确定，而水流能挟带冲泻质的数量不仅与本河段水流条件有关还和上游的供给条件有关，不能由水流条件和河床组成确定。

由上所述，可见把悬移质按补给来源的不同，区分为床沙质和冲泻质是有意义的。至于如何区分有不同的看法，有的将床沙粒

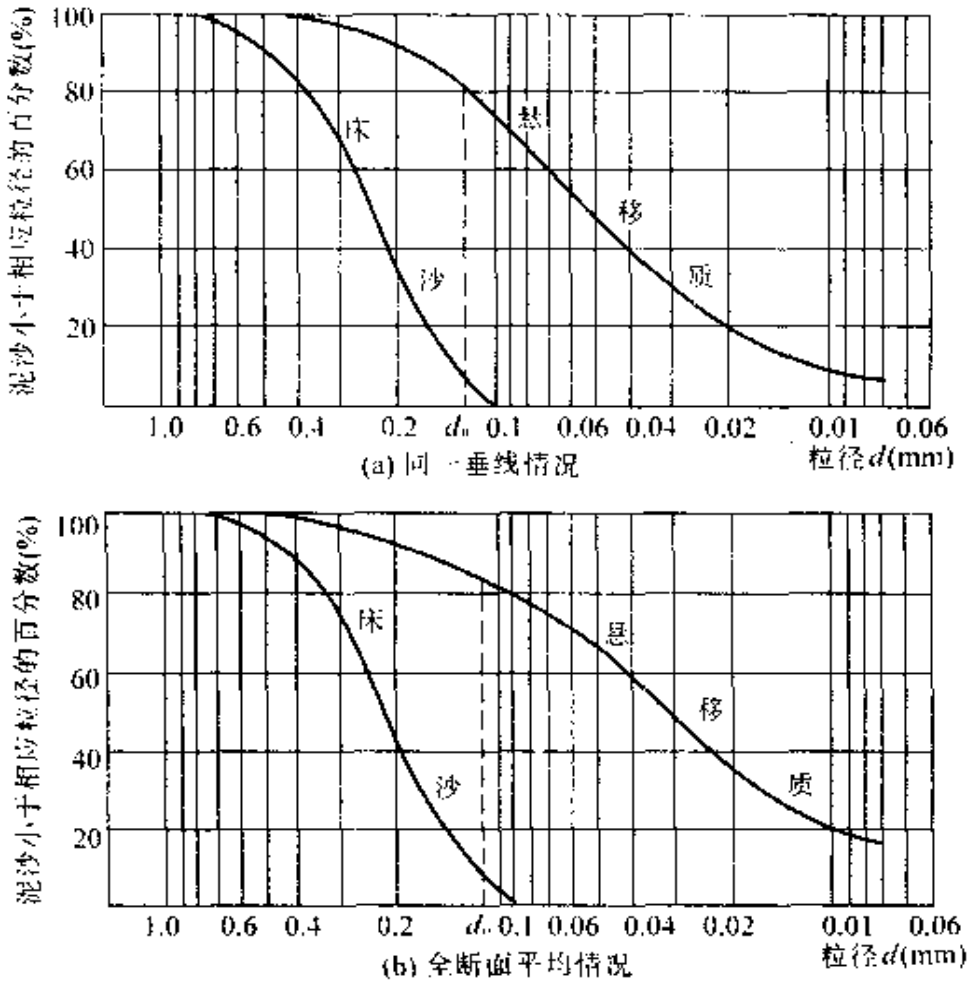


图 16.5

配曲线相应于 $p = 10\%$（或 5%）的粒径作为区分的界限粒径 d_0，大于 d_0 的为床沙质，小于 d_0 的为冲泻质；有的提出 d_0 应与水流条件有关，以 $\frac{\omega}{\kappa u_*} = 0.06$ 作为界限粒径 d_0 的确定条件*。

三、水流挟沙力

一定的水流及边界条件下，单位水体所能挟带的床沙质数量称为水流挟沙力 S_*，单位为 N/m^3。若将水流作为一元流动处理，则水流挟沙力就是全断面的平均值，即

$$S_* = \frac{G_{S*}}{Q} \tag{16.54}$$

式中 G_{S*} 为床沙质的全断面饱和输沙率，Q 为流量。

从理论上讲，可以通过力学分析建立水流挟沙力公式。限于当前的研究水平，水流挟沙力问题的研究尚不成熟，一些理论性较强的公式，使用起来很不方便，且式中的参数也不易定得准确。工程上多采用半理论半经验公式、甚至是纯经验公式来推求水流挟沙力。

根据长江、黄河及一些水库、渠道、室内试验资料，研究得出水流挟沙力与代表水流条件和河床组成条件的综合因素 $v^3/gR\omega$ 有较好的关系，见图 16.6，其关系式可以下式表示

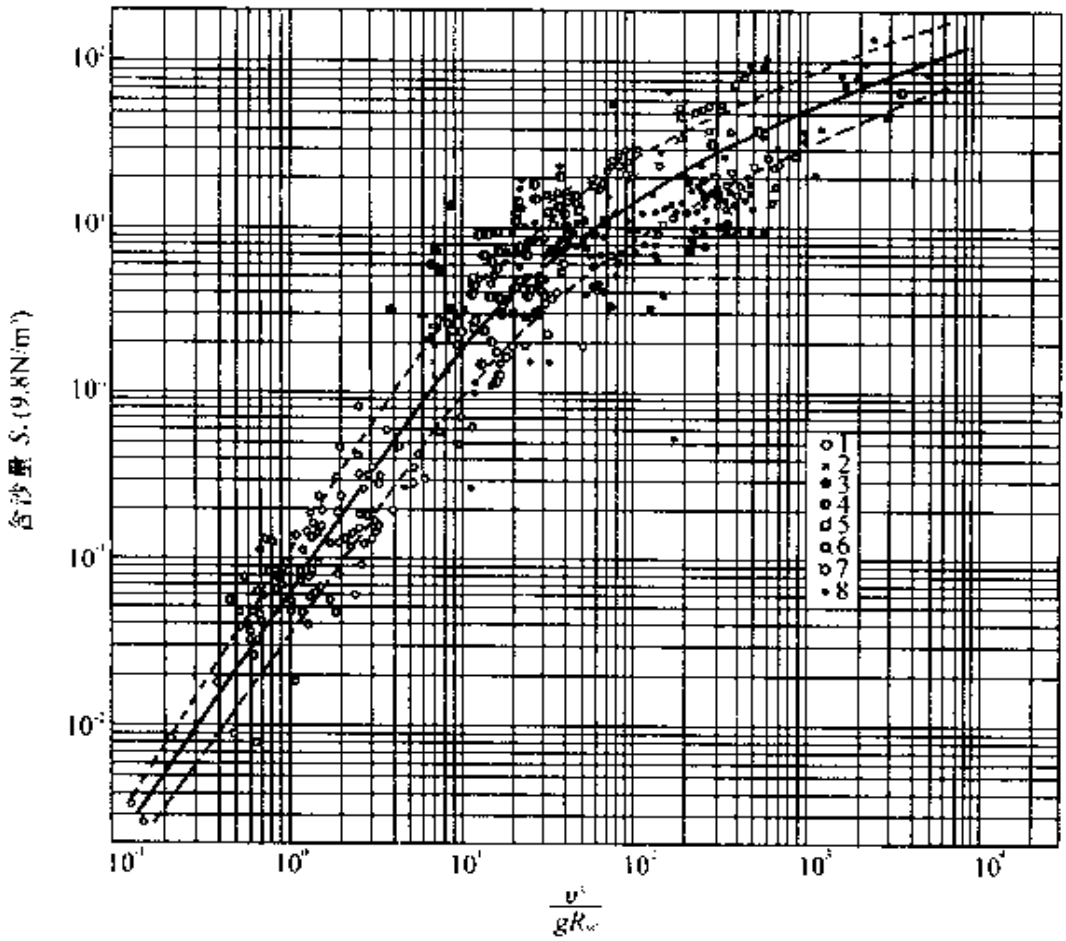
$$S_* = K\left(\frac{v^3}{gR\omega}\right)^m \tag{16.55}$$

式中 v 为断面平均流速，R 为水力半径，ω 为床沙质沉速，g 为重力加速度，K 为系数，m 为指数。K、m 的值与 $\frac{v^3}{gR\omega}$ 有关。它们之间的关系曲线见图 16.7。

式(16.55)有广泛的实测资料作基础，所以适应性广泛。工程中，多根据与工程问题有关的实测资料点绘 $S_* \sim \frac{v^3}{gR\omega}$ 关系，以确

* 曹如轩等．高含沙引水渠道输沙能力的数学模型，水利学报，1987 年第 9 期．

定 K 和 m 值。



1—长江;2—武汉水利电力学院玻璃水槽;3—黄河;4—人民胜利渠;
5—南京水利实验处钢板水槽;6—青铜峡灌区;7—三门峡水库;8—官厅水库

图 16.6

例 16.5 某平原地区冲积河流,原河宽为 B_0,平均水深为 H_0,相应流量为 Q_0。若在河流中修建围堤,将河宽束窄为 $\frac{2}{3}B_0$,问河床将发生什么变化?在河床达到新的相对平衡后,其平均水深 H 应为多少?

解: 原河流在相对平衡状态下的挟沙力为

$$S_* = K\left(\frac{v^3}{gH_0\omega}\right)^m$$

$$= K\left(\frac{Q_0^3}{gB_0^3H_0^4\omega}\right)^m$$

修建围堤后的挟沙力

$$S_*' = K\left[\frac{Q_0^3}{g\left(\frac{2}{3}B_0\right)^3H^4\omega}\right]^m = K\left(\frac{3}{2}\right)^{3m}\left(\frac{Q_0^3}{gB_0^3H_4\omega}\right)^m$$

因为$\left(\frac{3}{2}\right)^{3m}>1$，故在水深不变的情况下 $S_*'>S_*$，要保持输沙相对平衡，则必须 $H>H_0$，即发生冲刷，河床经调整达到新的相对平衡时 $S_*'=S_*$，即

$$\frac{1}{H_0^{4m}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{3m}\cdot\frac{1}{H^{4m}} \quad 或 \quad H = \left(\frac{3}{2}\right)^{3/4}H_0 = 1.355H_0$$

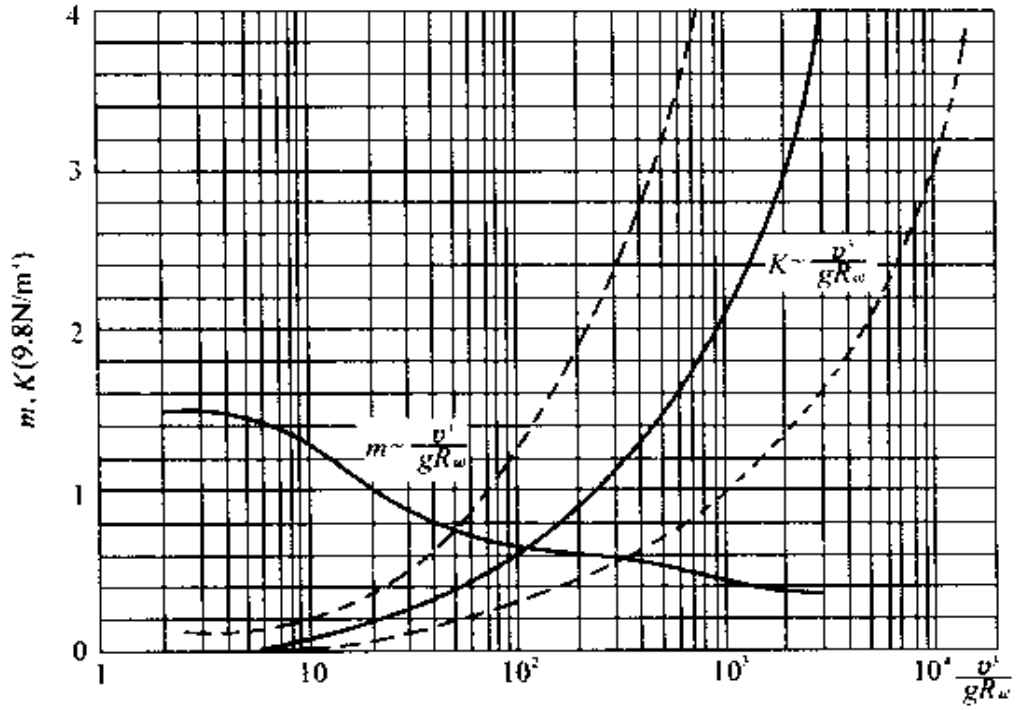


图 16.7

习　题

16.1　有一沙样重 2.85N，筛分的结果如表。试绘制该沙样的粒径级配曲线，并求平均粒径、中值粒径。

筛孔(mm)	1.0	0.707	0.50	0.354	0.250	0.177	0.125	0.0707
存留沙重 $10^{-2}N$	0	15.8	18.7	40.5	90.1	70.4	30.6	18.9

16.2　1 m^3 浑水中泥沙重量为 2646 N，若泥沙密度为 2700 kg/m^3，试分别以体积比含沙量、重量比含沙量、混合比含沙量表达浑水的含沙量.

16.3　有一矩形渠道，宽度为 B、糙率为 n，流量为 Q，床沙质含沙量为 S，其沉速为 ω，由于渠道设计比降甚小，造成放水后泥沙严重淤积迫过水深与河床的调节作用，淤积后的渠道比降增大，问渠道比降增大到多少时，渠道不再发生淤积？（假定淤积后渠道糙率不变）

16.4　某河道型水库长 20 km，当入库流量为 1000 m^3/s 时，全库区平均河宽为 200 m，河床比降为 1‰，回水末端以上河道平均水深为 5 m，库区河床组成较均匀，d_{50} = 3 mm，问在上述水流条件下，河床上的泥沙会不会向坝前推移，到达何处将停止推移？（可认为库区水面水平）

第十七章　波浪理论基础

第一节　概　述

具有自由表面的液体的局部质点受到扰动后，离开原来的平衡位置而作周期性起伏运动，并向四周传播的现象，称为波浪。必须指出，发生波浪时，只是波形向前运动，而液体质点只在原处作周期运动（如近似作圆周或椭圆运动等），正如风吹过麦田时，麦浪向前运动，而麦子只在原地作起伏运动一样。

自然界中的波浪种类很多，可按下列不同出发点进行分类。

1. 按发生波浪的原因分：

(1)风成波。由风力作用引起的波浪。

(2)潮汐波。由日、月引力作用和变化引起的波浪。

(3)地震波。由地震作用引起的波浪。

(4)船行波。由船舶航行引起的波浪。

2. 按波浪所受的主要作用力分：

(1)重力波。重力起主要作用的波浪。例如当液面受外力作用而离开其平衡位置时，在重力和惯性作用下企图恢复其平衡位置而引起的波动，即为重力波。

(2)表面张力波。当风吹水面，但风力不大，只在水面引起微波，此时使液体恢复平衡状态的主要作用力为表面张力，故称表面张力波。

(3)弹性波。由水底地震或爆炸引起的波浪，此时液体的弹性力起着主要作用，称为弹性波。

3. 按引起波浪的外力是否继续存在分：

(1)强制波。引起波浪的外力仍继续存在的波浪。例如风力

仍继续作用下的风成波即为强制波。

(2)自由波。引起波浪的外力已经消失的波浪。例如风力已经消失的风成波,在重力和惯性作用下仍继续波动,属于自由波。

4. 按运动要素与坐标的关系分:

(1)二向波。运动要素只与两个坐标有关,属于二元运动的波浪。

(2)三向波。运动要素与三个坐标有关,属于三元运动的波浪。

5. 按水底对波浪运动有无影响分:

(1)深水波。不受水底影响的波浪。一般认为,水深大于波长之半时,波浪不受水底影响,属于深水波。

(2)浅水波。受到水底影响的波浪。当水深小于波长之半时,水底影响波浪运动,即为浅水波。

6. 按波形是否向前移动分:

(1)推进波。波形向前移动的波浪。

(2)立波。波形并不向前移动,只在原处作起伏运动的波浪。

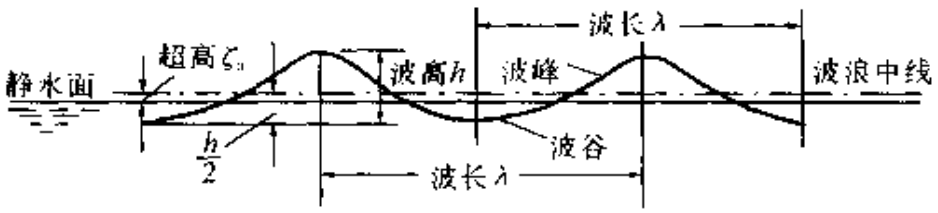


图 17.1

表征波浪运动形态和特征的主要物理量统称为波浪要素。现分述如下。图 17.1 为波浪纵剖面图。波浪在静水面以上的部分称为波峰,波峰的最高点称为波顶;静水面以下的部分称为波谷,波谷最低点称为波底。波顶与波底之间的垂直距离 h 称为波高。两个相邻波顶或波底之间的水平距离 λ 称为波长。波高与波长之比 h/λ 称为波陡。平分波高的水平线称为波浪中线。一般由于波峰比较尖突,波谷比较平坦,静水面至波顶的距离大于至波底的距离,因此波浪中线位于静水面之上,其超出的高度 ζ_0 称为超

高。重复一个波动过程所经历的时间 T 称为波周期。对于推进波，波周期等于波形沿水平方向移动一个波长所需的时间；对于立波，波周期则等于波形起伏一次所需的时间。推进波波形移动的速度 c 称为波速。波速等于波长与波周期之比，即 $c=\frac{\lambda}{T}$。

波浪对于国民经济和工程建设有着密切的关系。例如，对于港口及航道工程，在设计码头、防波堤及护岸建筑物时必须考虑波浪的作用；同时波浪还会引起水底泥沙运动，使港口和航道发生淤积，影响船舶停泊和通航。对于水库工程，必须考虑波浪对堤坝及闸门等结构物的冲击作用。对于造船工程，则应考虑波浪对船舶结构坚固性和航行的稳定性的影响，同时还应考虑波浪引起的航行阻力等问题。为了正确设计港口、水库、船舶等各类工程结构物，必须掌握波浪的运动规律以及波浪对有关工程结构物的作用。

在海洋、湖泊、水库中最常见和影响最大的是风成波。为了便于阐明波浪运动的基本特性，本章主要介绍风成波中比较简单的二向波、自由波、重力波，具体讲述这一波浪范畴内的推进波和立波、深水波和浅水波，即

风成波（二向波、自由波、重力波）{ 推进波 { 深水波 / 浅水波 ； 立波 { 深水波 / 浅水波

第二节　风成波的发生、发展和消失及其行近岸滩时的变化

当风吹过水面时，由于气体和液体表面的摩擦作用，将形成一定的波状界面以维持平衡。当风力小时，水面将形成微波，此时表面张力的作用较大，即为表面张力波。当风力加大时，在凸面处，水面气流流线较密，流速增大，压强减小；在凹面处，水面气流流线较稀疏，流速减小，压强增大。在不平衡的压力作用下，凹面下降，凸面上升，使波高增大，波动加剧，此时重力对波动起主要作用，表

面张力可以忽略，即为重力波（图 17.2）。表面张力波一般为二向波。当风力加强，形成重力波后，因风力不均匀和风向的不一致，一部分波峰被风吹破而形成若干孤立的波峰，波动传播方向也不一致，形成三向波。但如风向持久不变，孤立的波峰又将连成与风向相垂直的波峰线而形成二向波。



图 17.2

风成波的外形是不对称的曲线，波峰部分比较尖突，且波浪的前坡较陡，后坡较平坦。这是由于风过水面时受波浪影响，使背风面发生漩涡，压力减小，而向风面直接受风力作用，压力较大，使波浪向前倾斜，形成前陡后坦现象。又因波浪的后坡充分受到风力作用，故后坡上又可能形成新的波浪，称为二级波。二级波的波高和波长都较一级波浪为小。有时二级波上还可能形成三级波。

当风力继续加大，波高亦相应增大，波浪的前坡更陡，后坡更为平坦。当波峰过于陡峻时，波顶失去平衡而发生破碎。

上述波浪运动形态是风力作用存在下的情况，即波浪为强制波，其波形特点是前后坡不对称。风停止后，波浪仍然存在，直至波浪的能量全部耗尽，水面才恢复平静。这种波浪，就是自由波，亦称余波。自由波波形比较规则，前坡与后坡较为对称。因波能的消耗极为缓慢，所以自由波将持续很长一段时间才会消失。

下面说明波浪行近岸滩时发生的变化。当海面上发生波浪并向岸滩传播时，即为推进波。当推进波位于水深 H 大于半个波长处时（$\frac{H}{\lambda}>0.5$），因水深较大，水底对波浪几乎没有影响，水质点运动轨迹近似为圆形，其半径随深度增大而迅速减小，称为深水推进波。当波浪推进到浅水区域，因受海底影响，其运动规律亦发生变化。当水深小于半个波长时（$\frac{H}{\lambda}<0.5$），海底开始影响波浪运动，水质点运动轨迹由圆形逐渐变为椭圆，近底水质点则作往复直线运动，称为浅水推进波。因浅水推进波的波能集中于较小的水深

范围内，尽管水底阻力会消耗部分波能，但与深水推进波相比，波高和波陡仍有所增大，波峰更为尖突。浅水推进波继续向岸边运动，水深进一步减小，波高和波陡继续增大。当波陡增大到一定程度时，波浪失去平衡，波峰破碎。波浪破碎时的水深 H_c 称为临界水深。对于波高、波长不同的浅水推进波，其临界水深也不同；此外，由于潮水涨落、水底坡度及糙率等的影响，波浪破碎的位置亦有所变化。因此，波浪往往在近岸的某一范围内破碎，称为波浪破碎带。但在底坡很缓、波陡较小、波能集中现象不显著的情况下，波浪也可能不破碎。波浪破碎后，重新组成新的波浪继续向前推进。由于波能消耗较多，新波的波高和波长都将比原波为小。由于新波仍含有一定的能量，且因水深较小，底层水体运动受水底的摩阻影响，致使表层波浪传递速度大于底层部分，前坡比后坡陡峻，波峰高度显著增大，波谷更为坦长。新波的水质点不再作近似封闭的椭圆运动，而有明显的向前运动，并逐渐形成一股水流向前推移，底层则产生回流，这种波浪的性质已不同于推进波，称为击岸波或涌波。击岸波具有较大的能量，能掀起底部泥沙，使岸滩受到冲刷，该处的水工建筑物亦将受到击岸波的强烈冲击。击岸波在岸滩最后一次破碎后，形成一股强烈的冲击流，顺着岸滩上涌到一定高度后，再回流入海。

综上所述，波浪行近岸滩时可按水深的变化划分为深水波带、浅水波带、击岸波带和上涌带等四个区段，如图 17.3 所示。至于这些区段的具体分界位置则取决于原波的波浪要素、水底坡度和糙率、风力大小和风向等因素。此外，当波浪在运动过程中遇到各种不同形状的建筑物时，将改变其运动特性。例如，当波浪遇到垂直平面时，将发生反射或折射；当遇到曲面时，将发生绕射或散射等。

由于自由波可持续相当长的时间才会逐渐消失，即波能量的消耗是很缓慢的，这说明摩阻力对波浪的影响较小。因此，在研究波浪问题时，一般可忽略摩阻力的影响，而把它当作理想液体来考

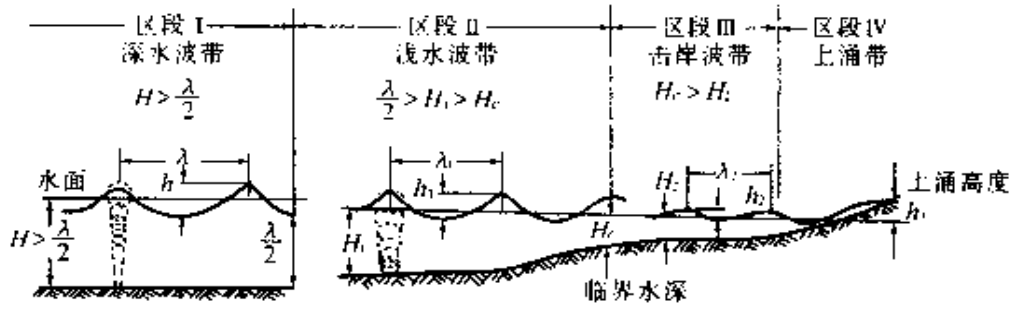


图 17.3

虑。

研究波浪的理论很多，可归纳为微幅波理论和有限振幅波理论两类，而有限振幅波理论又包括余摆线波理论、斯托克斯波理论、椭圆余弦波理论等，但各家理论都有一定的局限性，只是在一定的条件下才比较符合实际。本章仅介绍较为简明和实用的余摆线波理论。

本章主要研究二向自由波的运动规律，研究的问题包括水质点运动轨迹、波形曲线、超高、波速、波周期、质点运动速度、波压力和波能量等。

第三节　拉格朗日连续方程和运动方程

第三章曾叙述过描述液体运动的两种方法——拉格朗日法和欧拉法。前者以液体质点为对象来研究液体运动规律，一般情况下由于液体质点的运动关系式难以建立，故很少采用。在波浪运动中，每个液体质点均作有规律的振荡运动，用拉格朗日法来描述波浪运动较为方便，因此在分析波浪运动规律之前，先应用拉格朗日法建立液体运动的基本方程——拉格朗日连续方程和运动方程。

一、拉格朗日连续方程

在不可压缩液体的流场中取固定直角坐标系。按拉格朗日法，液体质点的坐标可表示为起始坐标(a,b,c)和时间 t 的函数，

即

$$\left.\begin{aligned} x &= f_1(a,b,c;t) \\ y &= f_2(a,b,c;t) \\ z &= f_3(a,b,c;t) \end{aligned}\right\} \tag{17.1}$$

式中 a、b、c 的数值不随时间变化，称为拉格朗日变数。

液体质点的速度 u 在各坐标方向的分量可表示为

$$\left.\begin{aligned} u_x &= \frac{\partial x}{\partial t} \\ u_y &= \frac{\partial y}{\partial t} \\ u_z &= \frac{\partial z}{\partial t} \end{aligned}\right\} \tag{17.2}$$

液体质点的加速度 a 在各坐标方向的分量则表示为

$$\left.\begin{aligned} a_x &= \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \\ a_y &= \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \\ a_z &= \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \end{aligned}\right\} \tag{17.3}$$

现仍用质量守恒定律导出连续方程。

设瞬时 t_0，在液流中取一微小四面体 $OABC$，其直角边长分别为 $\mathrm{d}a$，$\mathrm{d}b$，$\mathrm{d}c$，如图 17.4 所示。四面体各顶点的坐标分别为 $O:(a,b,c)$；$A:(a+\mathrm{d}a,b,c)$；$B:(a,b+\mathrm{d}b,c)$；$C:(a,b,c+\mathrm{d}c)$。四面体体积为

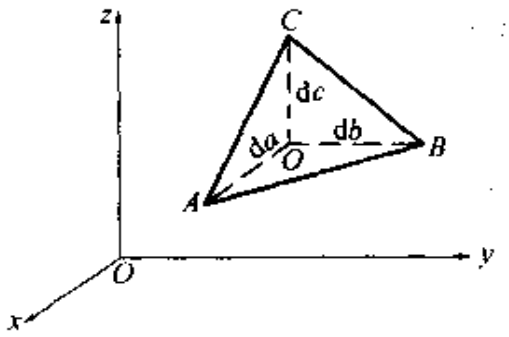


图 17.4

$$\mathrm{d}V_0 = \frac{1}{6}\mathrm{d}a\mathrm{d}b\mathrm{d}c \tag{17.4}$$

经某一时段后，在另一瞬时 t，原四面体中各质点运动到新的

位置，各顶点的坐标分别为

O：
$$\left.\begin{aligned} x_0 &= f_1(a,b,c;t) \\ y_0 &= f_2(a,b,c;t) \\ z_0 &= f_3(a,b,c;t) \end{aligned}\right\}$$

A：
$$x_A = f_1(a+\mathrm{d}a,b,c;t)$$

按泰勒公式展开，并略去二阶以上微量后得

$$\left.\begin{aligned} x_A &= f_1(a,b,c;t) + \frac{\partial f_1(a,b,c;t)}{\partial a}\mathrm{d}a \\ &= x_0 + \frac{\partial x}{\partial a}\mathrm{d}a \end{aligned}\right\}$$

同理
$$\left.\begin{aligned} y_A &= f_2(a+\mathrm{d}a,b,c;t) = y_0 + \frac{\partial y}{\partial a}\mathrm{d}a \\ z_A &= f_3(a+\mathrm{d}a,b,c;t) = z_0 + \frac{\partial z}{\partial a}\mathrm{d}a \end{aligned}\right\}$$

B：
$$\left.\begin{aligned} x_B &= x_0 + \frac{\partial x}{\partial b}\mathrm{d}b \\ y_B &= y_0 + \frac{\partial y}{\partial b}\mathrm{d}b \\ z_B &= z_0 + \frac{\partial z}{\partial b}\mathrm{d}b \end{aligned}\right\}$$

C：
$$\left.\begin{aligned} x_C &= x_0 + \frac{\partial x}{\partial c}\mathrm{d}c \\ y_C &= y_0 + \frac{\partial y}{\partial c}\mathrm{d}c \\ z_C &= z_0 + \frac{\partial z}{\partial c}\mathrm{d}c \end{aligned}\right\}$$

则运动后四面体体积为

$$\mathrm{d}V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} (x_A-x_0)(y_A-y_0)(z_A-z_0) \\ (x_B-x_0)(y_B-y_0)(z_B-z_0) \\ (x_C-x_0)(y_C-y_0)(z_C-z_0) \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{6}\mathrm{d}a\mathrm{d}b\mathrm{d}c\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial a} & \frac{\partial y}{\partial a} & \frac{\partial z}{\partial a} \\ \frac{\partial x}{\partial b} & \frac{\partial y}{\partial b} & \frac{\partial z}{\partial b} \\ \frac{\partial x}{\partial c} & \frac{\partial y}{\partial c} & \frac{\partial z}{\partial c} \end{vmatrix} \tag{17.5}$$

按质量守恒定律，运动前后四面体内液体质量应保持不变。因为液体是不可压缩的，密度 ρ = 常数，则运动前后四面体体积应保持不变，即 $\mathrm{d}V_0 = \mathrm{d}V$。于是按式(17.4)与(17.5)右边相等的条件可得

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial a} & \frac{\partial y}{\partial a} & \frac{\partial z}{\partial a} \\ \frac{\partial x}{\partial b} & \frac{\partial y}{\partial b} & \frac{\partial z}{\partial b} \\ \frac{\partial x}{\partial c} & \frac{\partial y}{\partial c} & \frac{\partial z}{\partial c} \end{vmatrix} = 1 \tag{17.6}$$

因瞬时 t 是任意选定的，故上述行列式等于 1 的关系不随时间变化，它对时间的偏导数应等于零，即

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial a} & \frac{\partial y}{\partial a} & \frac{\partial z}{\partial a} \\ \frac{\partial x}{\partial b} & \frac{\partial y}{\partial b} & \frac{\partial z}{\partial b} \\ \frac{\partial x}{\partial c} & \frac{\partial y}{\partial c} & \frac{\partial z}{\partial c} \end{vmatrix} = 0 \tag{17.7}$$

上式为不可压缩液体拉格朗日连续方程。式中$\frac{\partial x}{\partial a}, \frac{\partial x}{\partial b}, \cdots$表示运动过程中各质点相互间距离的变化率，即该式规定了各质点之间任何时刻都必须满足的基本条件。

如液体只作 xOz 铅直平面运动时，式(17.7)可简化为

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial a} & \dfrac{\partial z}{\partial a} \\ \dfrac{\partial x}{\partial c} & \dfrac{\partial z}{\partial c} \end{vmatrix} = 0 \tag{17.8}$$

或写为

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial z}{\partial c} - \frac{\partial x}{\partial c}\frac{\partial z}{\partial a}\right) = 0 \tag{17.9}$$

二、拉格朗日运动方程

在理想液体中取一微小六面体，其中心点 O_1 的坐标为(x、y、z)，各边长度分别为 dx、dy、dz(图 17.5)。因理想液体不存在摩阻力，故作用于六面体上的力只有质量力和压力。

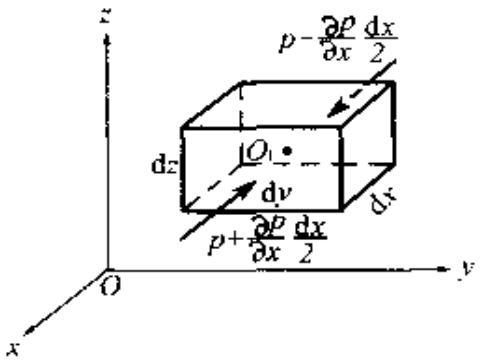


图 17.5

设作用于液体的单位质量力在 x、y、z 方向的分量分别为 X、Y、Z，则作用于六面体的质量力在 x 方向的分量为 $X\rho dxdydz$。又设六面体中心点 O_1 的压强为 p，则作用于六面体与 x 轴相垂直的两个面上的压力分别为$\left(p-\frac{\partial p}{\partial x}\frac{dx}{2}\right)dydz$ 和 $-\left(p+\frac{\partial p}{\partial x}\frac{dx}{2}\right)dydz$。液体质点在 x 方向的速度分量为$\frac{\partial x}{\partial t}$，加速度分量为$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$。应用牛顿第二运动定律有

$$X\rho dxdydz + \left(p-\frac{\partial p}{\partial x}\frac{dx}{2}\right)dydz - \left(p+\frac{\partial p}{\partial x}\frac{dx}{2}\right)dydz = \rho dxdydz\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$$

全式除以 $\rho dxdydz$，整理得

$$X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$$

上式为 x 方向的运动方程。同理可导出 y 方向和 z 方向的运动方程，并将三个方向的运动方程归并为

$$\left.\begin{aligned} X-\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}&=\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\\ Y-\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}&=\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}\\ Z-\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}&=\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}\end{aligned}\right\} \tag{17.10}$$

现将式(17.10)中各式依次乘以$\frac{\partial x}{\partial a}$、$\frac{\partial y}{\partial a}$和$\frac{\partial z}{\partial a}$，然后相加得

$$\left(X-\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right)\frac{\partial x}{\partial a}+\left(Y-\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right)\frac{\partial y}{\partial a}+\left(Z-\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right)\frac{\partial z}{\partial a}$$

$$=\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial a}+\frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial a}+\frac{\partial p}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial a}\right)$$

因动水压强 p 与质点所在位置 x、y、z 有关，而 x、y、z 又是质点起始坐标 a、b、c 和时间 t 的函数，故压强 p 是 a、b、c 的复合函数。按复合函数求导法则，$\frac{\partial p}{\partial a}=\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial a}+\frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial a}+\frac{\partial p}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial a}$，则上式右端可写为$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial a}$。

同理，将式(17.10)中各式分别依次乘以$\frac{\partial x}{\partial b}$、$\frac{\partial y}{\partial b}$、$\frac{\partial z}{\partial b}$和$\frac{\partial x}{\partial c}$、$\frac{\partial y}{\partial c}$、$\frac{\partial z}{\partial c}$后相加，又可得到两个方程。将上述三个方程列出得

$$\left.\begin{aligned}\left(X-\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right)\frac{\partial x}{\partial a}+\left(Y-\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right)\frac{\partial y}{\partial a}+\left(Z-\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right)\frac{\partial z}{\partial a}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial a}&=0\\ \left(X-\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right)\frac{\partial x}{\partial b}+\left(Y-\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right)\frac{\partial y}{\partial b}+\left(Z-\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right)\frac{\partial z}{\partial b}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial b}&=0\\ \left(X-\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right)\frac{\partial x}{\partial c}+\left(Y-\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right)\frac{\partial y}{\partial c}+\left(Z-\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right)\frac{\partial z}{\partial c}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial c}&=0\end{aligned}\right\} \tag{17.11}$$

上式为不可压缩理想液体拉格朗日运动方程，它是液体运动过程

中质量力、压力和加速度之间必须满足的基本关系式。

对于质量力只有重力的二元运动，如取 z 轴铅垂向下的 xOz 运动平面，则有 $X=Y=0, Z=g$（重力加速度），且有 $\frac{\partial x}{\partial b}=\frac{\partial y}{\partial b}=\frac{\partial z}{\partial b}=\frac{\partial y}{\partial a}=\frac{\partial y}{\partial c}=\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=\frac{\partial p}{\partial b}=0$，则式(17.11)可简化为

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial a}\left(gz-\frac{p}{\rho}\right)&=\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\frac{\partial x}{\partial a}+\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\frac{\partial z}{\partial a}\\ \frac{\partial}{\partial c}\left(gz-\frac{p}{\rho}\right)&=\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\frac{\partial x}{\partial c}+\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\frac{\partial z}{\partial c}\end{aligned}\right\}\tag{17.12}$$

为了避免与浅水推进波水质点运动轨迹椭圆的半长轴 a 和半短轴 b 相混淆，将质点起始坐标 a、b、c 分别用 x_0、y_0、z_0 来表示，则连续方程(17.9)和运动方程(17.12)分别改写为

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial x}{\partial x_0}\frac{\partial z}{\partial z_0}-\frac{\partial x}{\partial z_0}\frac{\partial z}{\partial x_0}\right)=0\tag{17.13}$$

和

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_0}\left(gz-\frac{p}{\rho}\right)&=\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\frac{\partial x}{\partial x_0}+\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\frac{\partial z}{\partial x_0}\\ \frac{\partial}{\partial z_0}\left(gz-\frac{p}{\rho}\right)&=\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\frac{\partial x}{\partial z_0}+\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\frac{\partial z}{\partial z_0}\end{aligned}\right\}\tag{17.14}$$

第四节　有限振幅推进波

在海洋、湖泊、水库等广阔水面上发生的风成波，波高达数米或更大，波陡 h/λ 一般约为 $\frac{1}{10}\sim\frac{1}{30}$，其水质点的振幅为有限值，故称有限振幅波。风成波中的二向自由波就是一种有限振幅推进波。本节将应用余摆线理论对有限振幅深水推进波和浅水推进波的运动规律分别进行分析。余摆线理论的基本方法是根据对波浪运动的大量实际观测结果，首先假定液体质点的运动规律，然后再应用液体运动基本方程来验证其假定的正确性，在此基础上再导

出其他波浪运动要素的关系式。

一、深水推进波

1802 年盖司特耐(F.Gerstner)提出了深水推进波的圆余摆线理论。由于圆余摆线理论的解答简明,与实际观测结果相当符合,故至今仍广泛应用。

盖司特耐在仔细观测了深水推进波运动规律的基础上,提出了下列几点假定:

1. 水体为理想液体,不计摩阻力。水深为无限大,波浪运动不受水底影响。

2. 每一水质点均在铅直平面上作等速圆周运动,称为质点的轨迹圆(图 17.6),其圆心超出质点静止时的位置某一高度(即超高)。

3. 静止时位于同一水平面上的水质点波动时所形成的曲面称为波动面。同一波动面上的水质点的轨迹圆半径 r 均相等,在水面上,$r = r_0 = \frac{h}{2}$。从水面铅直向下,r 值迅速减小。

4. 作圆周运动时,质点的径线与通过圆心的向上铅垂线的夹角 θ 称为相角。在同一波动面上,相角随波浪推进方向的距离的增大而减小;同一瞬时圆心位于同一铅垂线上的水质点的相角相等。

在上述假定的基础上,首先提出深水推进波的基本方程,然后分别研究深水推进波的波形曲线、超高、轨迹圆半径、波速、波周期、质点运动速度、波压强和波能量等问题。

(一)基本方程

取波浪中线为 x 轴,沿波浪传播方向为正;取铅垂线为 z 轴,向下为正(图 17.7)。任一水质点 m 的轨迹圆圆心坐标为(x_0, z_0),则 m 点的坐标可表示为

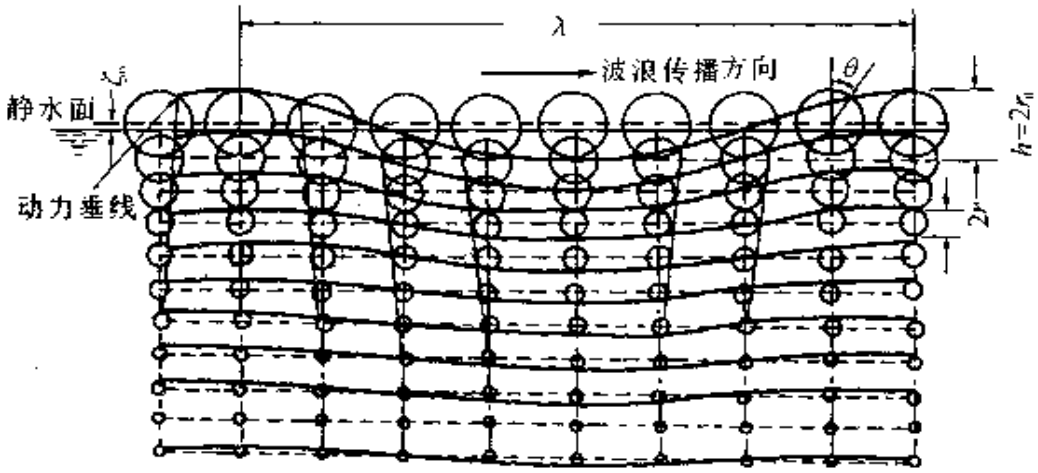


图 17.6

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + r\sin\theta \\ z &= z_0 - r\cos\theta \end{aligned}\right\} \quad (17.15)$$

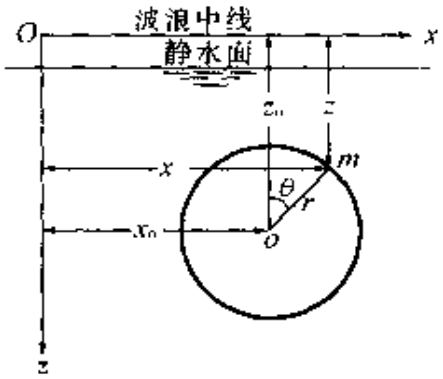


图 17.7

式中轨迹圆半径 $r = f(z_0)$；相角 θ 可写为

$$\theta = \sigma t - kx_0 \quad (17.16)$$

式中 σ 为质点角速度；k 为相角随距离的变化率，亦称转圆曲率。因时间 t 增加一个周期 T，质点绕轨迹圆转动一周，相角增加 2π，故 $\sigma = \frac{2\pi}{T}$。在同一时刻，当 x_0 增加一个波长 λ，相角恰好减少 2π（图 17.8），故 $k = \frac{2\pi}{\lambda}$。式(17.15)为深水推进波质点运动基本方程。

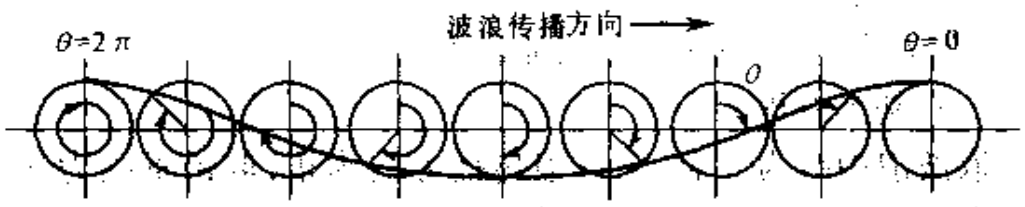


图 17.8

当波长 λ、周期 T、轨迹圆半径 r 已知时，应用基本方程可求

解下列问题：

1. 求解给定水质点(以圆心坐标 x_0、z_0 表示)在不同时刻 t 的位置(x,y)，即水质点运动轨迹。

2. 给定时刻 t 及深度 z_0，可求解不同水平坐标 x_0 处的水质点位置(x,y)，即时刻 t、深度 z_0 处的波形曲线。

3. 给定时刻 t 及水平坐标 x_0，可求解不同深度 z_0 处的水质点位置(x,y)，这些质点位置的连线称为动力垂线(见图 17.6)。

(二)波形曲线

静止时在同一水平面上的水质点，波动时沿波浪传播方向组成的曲线，即为波形曲线。不同深度 z 处的水质点均可组成各自的波形曲线。

因波浪传播过程中波形保持不变，为简便起见，下面分析 $t=0$ 时刻 $z_0=0$ 的水面波形曲线。以 $t=0$ 代入式(17.16)得

$$\theta = -kx_0$$

即

$$x_0 = -\frac{1}{k}\theta = -R\theta$$

式中 $R=\frac{1}{k}$，为转圆半径。以 $z_0=0$，$x_0=-R\theta$ 以及水面质点轨迹圆半径 $r=r_0$ 代入式(17.15)得水面波形方程为

$$\left.\begin{aligned} x &= -R\theta + r_0\sin\theta \\ z &= -r_0\cos\theta \end{aligned}\right\} \tag{17.17}$$

设半径为 R 的大圆内有一半径为 r_0 的小圆，取坐标 xOz 如图 17.9。当大圆沿上方的水平切线自右向左滚动，则小圆上任一点的轨迹即为以 $2r_0$ 为振幅的圆余摆线。设滚

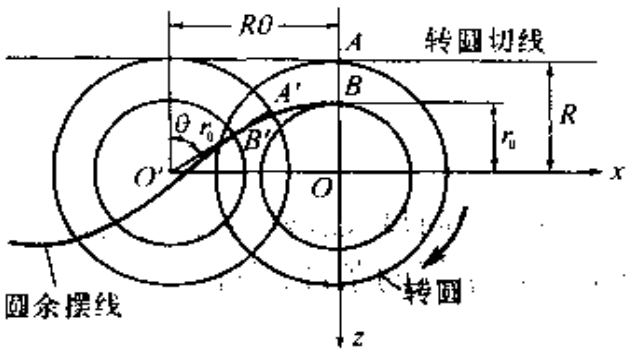


图 17.9

动时圆心从 O 点移至 O' 点，小圆上的 B 点移至 B' 点，转角为 θ。从几何关系可知，B' 点的坐标 (x, z) 符合式(17.17)的关系，这表明深水推进波的波形曲线为圆余摆线。

圆余摆线的波峰部分较陡峻，波谷部分较平坦，上下不对称，r_0 愈大，不对称性愈显著。当 $r_0 = R$ 的极限情况，圆余摆线成为

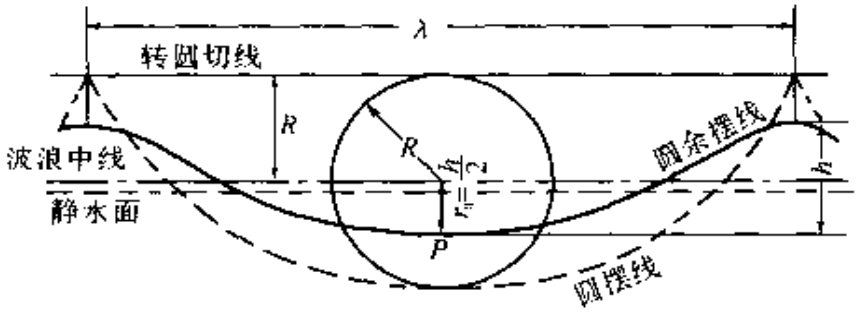


图 17.10

圆摆线(图 17.10)。圆摆线在峰顶处斜率不连续。如 $r_0 > R = \frac{\lambda}{2\pi}$，水质点在波顶处将脱离水面，波浪发生破碎，因此在理论上深水推进波的波高 h 不能大于 $2R = \frac{\lambda}{\pi}$。但在天然情况下，波高尚未达到这一极限值时波浪已经破碎。

同理可证明水面以下各波动面的波形曲线也是圆余摆线，且其转圆半径与水面的转圆半径相等，但曲线的振幅 $2r$ 随深度按指数规律减小。

(三)超高

因波动时水质点只在原处作圆周运动，并不向前移动，则在一个波长范围内，静水面以上波峰部分的面积应等于静水面以下波谷部分的面积。但因圆余摆线形状上下不对称，故波浪中线超出静水面一个高度 ζ_0，称为水面超高(图 17.11)。按静水面以上和以下面积相等的条件，则有

$$\int_0^{\lambda}(z - \zeta_0)\mathrm{d}x = 0$$

因 $z_0 = 0, z = -r_0\cos\theta; x = -R\theta + r_0\sin\theta, \mathrm{d}x = -R\mathrm{d}\theta + r_0\cos\theta\mathrm{d}\theta,$

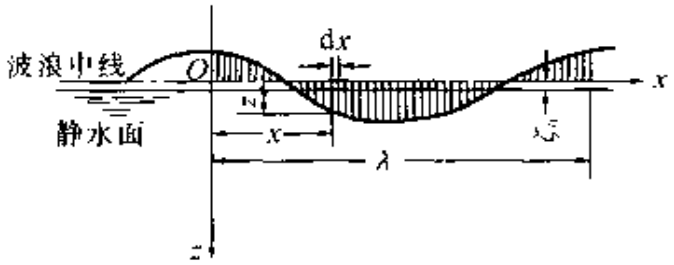


图 17.11

代入上式得

$$\int_0^{-2\pi}(-r_0\cos\theta-\zeta_0)(-R\mathrm{d}\theta+r_0\cos\theta\mathrm{d}\theta)$$

$$=r_0^2\pi-2\pi R\zeta_0=0$$

以 $R=\frac{\lambda}{2\pi}$代入，可得水面超高

$$\zeta_0=\frac{\pi r_0^2}{\lambda}=\frac{\pi h^2}{4\lambda} \tag{17.18}$$

同理，可得水面以下任一波动面的超高

$$\zeta=\frac{\pi r^2}{\lambda} \tag{17.19}$$

以上二式表明深水推进波的超高等于质点轨迹圆面积与波长之比。

（四）轨迹圆半径

对基本方程（17.15）中的 x 及 z 分别求出偏导数$\frac{\partial x}{\partial x_0}$、$\frac{\partial x}{\partial z_0}$、$\frac{\partial z}{\partial x_0}$、$\frac{\partial z}{\partial z_0}$，代入拉格朗日连续方程（17.13）中，整理后得

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[1+kr\frac{\partial r}{\partial z_0}-\left(kr+\frac{\partial r}{\partial z_0}\right)\cos\theta\right]=0$$

式中 k、r、σ 均与时间 t 无关，但 $\cos\theta$ 为 t 的函数，对 t 的偏导数不为零。为了满足上式（即满足连续方程），$\cos\theta$ 的系数必须为零，即

$$kr+\frac{\partial r}{\partial z_0}=0$$

因 r 与 x_0 无关，仅是 z_0 的函数，则 $\frac{\partial r}{\partial z_0} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}z_0}$。代入上式得

$$\frac{\mathrm{d}r}{r} = -k\mathrm{d}z_0$$

积分得

$$\ln r = -kz_0 + C$$

在水面上，$z_0 = 0$，$r = r_0 = \frac{h}{2}$，代入得 $C = \ln r_0$。于是得

$$r = r_0 e^{-kz_0} = \frac{h}{2} e^{-\frac{2\pi}{\lambda} z_0} \tag{17.20}$$

上式表明深水推进波水质点轨迹圆半径 r 随深度 z_0 按对数规律迅速减小。

例如，当 $z_0 = \frac{\lambda}{4}$ 时，$r = \frac{r_0}{4.81}$；当 $z_0 = \frac{\lambda}{2}$ 时，$r = \frac{r_0}{23.14} \approx 0$。即在水面以下半个波长的深度处，水质点轨迹圆半径已经很小，可认为该处液体几乎处于静止状态。因此，当水深 $H > \frac{\lambda}{2}$ 时，水底对波浪运动无影响，这种波浪即为深水波。

例 17.1 有一深水推进波，波高 $h = 2$ m，波长 $\lambda = 30$ m。求水面以下深度 $z_0 = 5$ m 处的质点轨迹圆半径及超高。

解： 由式(17.20)可得 $z_0 = 5$ m 处的质点轨迹圆半径

$$r = \frac{h}{2} e^{-\frac{2\pi}{\lambda} z_0} = \frac{2\ \mathrm{m}}{2} e^{-\frac{2\pi}{30\ \mathrm{m}} \times 5\ \mathrm{m}} = 0.351\ \mathrm{m}$$

由式(17.19)可得同一深度 z_0 处的超高

$$\zeta = \frac{\pi r^2}{\lambda} = \frac{\pi \times (0.351\ \mathrm{m})^2}{30\ \mathrm{m}} = 0.013\ \mathrm{m}$$

(五)波周期和波速

应用基本方程(17.15)中的 x 及 z 分别对 t 求出二阶偏导数 $\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$、$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$，连同前面求出的一阶偏导数 $\frac{\partial x}{\partial x_0}$、$\frac{\partial x}{\partial z_0}$、$\frac{\partial z}{\partial x_0}$、$\frac{\partial z}{\partial z_0}$ 一起代入拉格朗日运动方程(17.14)中，整理后得

$$\frac{\partial}{\partial x_0}\left(gz - \frac{p}{\rho}\right) = -\sigma^2 r\sin\theta$$

$$\frac{\partial}{\partial z_0}\left(gz - \frac{p}{\rho}\right) = k\sigma^2 r^2 + \sigma^2 r\cos\theta$$

以上二式分别乘以 $\mathrm{d}x_0$ 和 $\mathrm{d}z_0$，相加后可得全微分

$$\mathrm{d}\left(gz - \frac{p}{\rho}\right) = -\mathrm{d}\left(\frac{\sigma^2 r}{k}\cos\theta + \frac{1}{2}\sigma^2 r^2\right)$$

将上式积分，并将 $z = z_0 - r\cos\theta$ 代入，整理得

$$\frac{p}{\rho} = g(z_0 - r\cos\theta) + \frac{\sigma^2 r}{k}\cos\theta + \frac{1}{2}\sigma^2 r^2 + C \quad (17.21)$$

式中 C 为积分常数。在水面上，$z_0 = 0$，$r = r_0$，$p = p_0$，代入上式得

$$\frac{p_0}{\rho} = \left(\frac{\sigma^2}{k} - g\right) r_0\cos\theta + \frac{1}{2}\sigma^2 r_0^2 + C \quad (17.22)$$

式中 p_0 为水面大气压强，对于风停止后的自由波，p_0 = 常数，故等式右边应为常数。因等式右边第二、三两项均为常数，而第一项中 $\cos\theta$ 随 t 及 x 而变化，故其系数应等于零，即

$$\frac{\sigma^2}{k} - g = 0$$

或

$$\frac{\sigma^2}{k} = g \quad (17.23)$$

上式表明只有角速度平方与转圆曲率之比等于重力加速度时才能满足运动方程。

以 $\sigma = \frac{2\pi}{T}$，$k = \frac{2\pi}{\lambda}$ 代入式(17.23)，可得波周期为

$$T = \sqrt{\frac{2\pi\lambda}{g}} \quad (17.24)$$

波速为

$$c = \frac{\lambda}{T} = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}} \quad (17.25)$$

以上二式表明，深水推进波的周期和波速只与波长有关，并与波长的平方根成正比。

例 17.2 已知深水推进波的波长 $\lambda = 15$ m，求波周期及波速。

解： 由式(17.24)可得波周期

$$T = \sqrt{\frac{2\pi\lambda}{g}} = \sqrt{\frac{2\pi \times 15\ \text{m}}{9.81\ \text{m/s}^2}} = 3.1\ \text{s}$$

由式(17.25)可得波速

$$c = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}} = \sqrt{\frac{9.81\ \text{m/s}^2 \times 15\ \text{m}}{2\pi}} = 4.839\ \text{m/s}$$

(六)质点运动速度

深水推进波水质点绕轨迹圆运动的速度为

$$u = \frac{2\pi r}{T} = r\sqrt{\frac{2\pi g}{\lambda}} = \frac{h}{2}e^{-kz_0}\sqrt{\frac{2\pi g}{\lambda}} \tag{17.26}$$

可见质点运动速度与波高成正比，与波长的平方根成反比，并随深度 z_0 的增大按对数规律减小。

在水面上，$z_0 = 0$，$r = r_0 = \frac{h}{2}$，质点运动速度为

$$u_0 = \frac{2\pi r_0}{T} = \frac{h}{2}\sqrt{\frac{2\pi g}{\lambda}} \tag{17.27}$$

比较式(17.19)与式(17.26)可得

$$\zeta = \frac{u^2}{2g} \tag{17.28}$$

上式说明，波动时质点平均位置超出静止时位置的高度等于该质点的流速水头。

例 17.3 按例 17.1 的条件，求质点的运动速度。

解： 转圆曲率 $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{30\ \text{m}} = 0.209\ \text{m}^{-1}$

由式(17.26)可得 $z_0 = 5$ m 处的质点运动速度

$$u = \frac{h}{2}e^{-kz_0}\sqrt{\frac{2\pi g}{\lambda}} = \frac{2\ \text{m}}{2}e^{-0.209\ \text{m}^{-1} \times 5\ \text{m}}\sqrt{\frac{2\pi \times 9.81\ \text{m/s}^2}{30\ \text{m}}}$$

$$= 0.503\text{m/s}$$

(七)波压强

前面已用拉格朗日运动方程导出深水推进波波压强 p 的公式(17.21),式中 C 为待定积分常数。将关系式 $\frac{\sigma^2}{k}-g=0$ 代入式(17.22),可得

$$C=\frac{p_0}{\rho}-\frac{1}{2}\sigma^2 r_0^2$$

将上式代入式(17.21),并令 $p_0=0$(大气压强),同时考虑到式(17.23)的关系,然后全式除以 g 得

$$\frac{p}{\rho g}=z_0-\frac{\sigma^2}{2g}(r_0^2-r^2)=z_0-\frac{k}{2}(r_0^2-r^2)$$

$$=z_0-\frac{\pi r_0^2}{\lambda}+\frac{\pi r^2}{\lambda}=z_0-\zeta_0+\zeta \qquad (17.29)$$

因为拉格朗日法是以液体质点为研究对象的,故上式为轨迹圆中心纵坐标为 z_0 的水质点波压强的关系式。由图 17.12 可知,$z_0-\zeta_0+\zeta=z$,为质点静止时在水面以下的深度,因此式(17.29)可写为

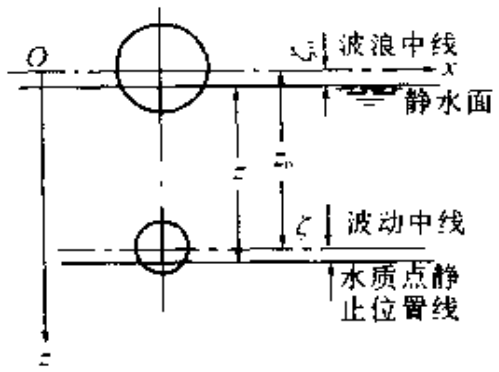


图 17.12

$$p=\rho g z \qquad (17.30)$$

上式表明深水推进波波动时任一质点的压强等于该质点静止时的静水压强,因此任一波动面均为等压面。但须指出,对于空间任一固定点,因不同时刻被不同水质点所占据,则该点处的压强将随时间而改变。当波顶通过该点的垂线时其压强最大;当波底通过该点的垂线时其压强最小。

根据式(17.30)可绘制深水推进波沿铅垂线的压强分布图,如图 17.13 所示。先绘制通过波顶点的 A_1B_1 垂线的压强分布图。图中 A_1C_1 为水质点静止时 A_1B_1 垂线上的静水压强分布线,水面 A_1 点的压强为零,水深等于 $\frac{\lambda}{2}$ 的 B_1 点的压强为 $\rho g\frac{\lambda}{2}$。波动时,

质点 A_1 升高到 A_1' 点(波顶点),A' 点压强仍等于零;同时水面以下任一点 D_1 升高到 D_1'(D_1' 的位置应由该质点轨迹圆半径 r_0 来确定),根据式(17.30),D_1' 点压强应为 $p_{D_1'} = \rho g z_{D_1}$。因此,从 D_1 点作水平线与 A_1C_1 相交于 E_1,再从 E_1 向上引铅垂线与从 D_1' 所作的水平线相交于 E_1',则 $D_1'E_1'$ 即代表 D_1' 点的压强。同理可得水面以下其他各点的压强。在水面以下$\frac{\lambda}{2}$的 B_1 点处,因 $\zeta \approx 0$,故该点压强近似等于静水压强 $\rho g \frac{\lambda}{2}$。按上述方法所求的压强分布线为 $A_1'E_1'C_1$ 曲线,一般可近似用直线 $A_1'C_1$(图中的虚线)代替。

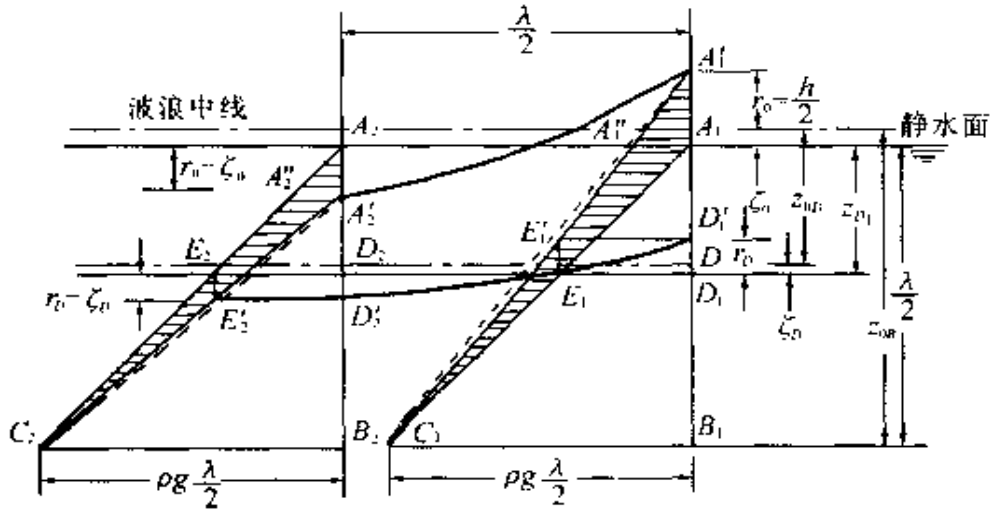


图 17.13

波动时液体某一空间点处的波压强和该点处静水压强的差值称为净波压强。沿波顶点的垂线 $A_1'B_1$ 的净波压强分布如图 17.13 中阴影线所示。由图可知最大净波压强发生在静水面处。如波压强近似按直线分布,则由几何关系求得最大净波压强为

$$\Delta p_{\max} = A_1''A_1 = \frac{A_1'A_1 \cdot C_1B_1}{A_1'B_1} = \rho g \frac{\frac{\lambda}{2}\left(\frac{h}{2} + \zeta_0\right)}{\frac{\lambda}{2} + \frac{h}{2} + \zeta_0} \tag{17.31}$$

同样可绘出通过波底点的铅垂线 A_2B_2 上的波压强分布曲线

$A_2'E_2'C_2$。可见该线上任一点的波压强均小于该点处的静水压强，故净波压强为负值，其净波压强分布仍用阴影线示于图中。压强分布线 $A_2'E_2'C_2$可近似用直线 $A_2'C_2$（图中的虚线）代替。最小净波压强发生在波底点 A_2' 处，其值为

$$\Delta p_{\min} = -A_2''A_2' = -\rho g\left(\frac{h}{2} - \zeta_0\right) \tag{17.32}$$

（八）波能量

波能量是指液体波动时比静止时增加的能量，包括动能和势能两部分。设某质点的质量为 δm，速度为 u，则该质点的动能为

$$\delta E_k = \frac{1}{2}\delta m u^2 \tag{17.33}$$

因水质点作等速圆周运动，故其动能为常数。又因波动时水质点的压强等于静止时的静水压强，则波能量中的势能部分只表现为质点位置势能的增加。在一个周期中，质点的平均位置为轨迹圆圆心，它超出质点静止位置的高度为超高 ζ，故质点势能的平均值为

$$\delta E_p = \delta mg\zeta \tag{17.34}$$

由

$$\delta E_k = \frac{1}{2}\delta m u^2 = \frac{1}{2}\delta m\left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2$$

$$= \frac{2\delta m\pi^2 r^2}{\frac{2\pi\lambda}{g}} = \delta mg\frac{\pi r^2}{\lambda} = \delta mg\zeta$$

可知深水推进波质点的动能等于其平均势能。

深度为 z_0 底面积为一个单位的水体的动能和平均势能必相等，其值为

$$E_k = \bar{E}_p = \int_0^{z_0}\zeta\rho g\,\mathrm{d}z_0 = \int_0^{z_0}\rho g\frac{\pi r_0^2}{\lambda}\mathrm{e}^{-2kz_0}\mathrm{d}z_0$$

$$= \frac{\rho g h^2}{16}\left(1 - \mathrm{e}^{-2kz_0}\right) \tag{17.35}$$

在上述范围内水体的平均总波能为

$$\bar{E} = E_k + \bar{E}_p = \frac{\rho g h^2}{8}(1 - e^{-2kz_0}) \tag{17.36}$$

由上式知，波能 E 随 z_0 的增大而增加，但水深愈大，E 随 z_0 的增加率愈小，即波能大部分集中于液体表层。当水深为无限时（即 $z_0 \to \infty$），底面积为一个单位的水体的平均总波能为

$$\bar{E} = \frac{\rho g h^2}{8} \tag{17.37}$$

波动时水质点虽然没有向前移动，但波能却随质点的运动而沿波浪传播方向向前传递。设在波浪中任取一垂直于波浪传播方向的平面 AB（图 17.14）。在 AB 面左右各 $2r$（r 为质点轨迹圆半径）的范围内，每个质点在一个周期内必有两次穿越 AB 面，一次自左向右流出，另一次自右向左流入。因质点的动能和压能均不变，故质点流出和流入 AB 面时的动能和压能均相等，但其位能却不等。由图 17.14 可知，不论哪个质点，流出 AB 面时的位置 M_1 总高于流入时的位置 M_2，即质点总以较大的势能流出该面而以较小的势能从该面流入。质点每往复运动一次，就有一部分势能留在右侧，因此波能量就不断地通过质点的运动而向前传递，这种现象称为波能传递。单位时间内的波能传递量称为波能流量。因为向前传递的波能只有势能中的位能，而位能是与波形同时移动的，即位能是以波速 c 向前传递的。由于势能等于总波能的一半，故单位宽度内水体的波能流量为

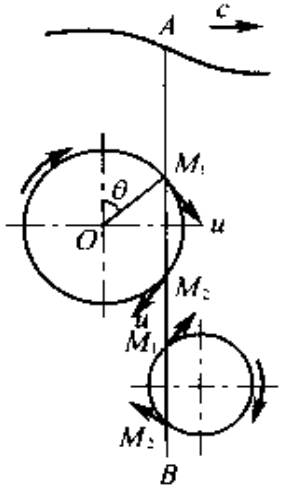


图 17.14

$$\Phi = \frac{1}{2}\bar{E}c = \frac{\rho g h^2 c}{16} \tag{17.38}$$

由上式可知，波能 $\bar{E}$ 的传递速度为 $\frac{1}{2}c$。

以上介绍的盖司特耐圆余摆线理论能满足液流的连续方程、

运动方程和边界条件，它能比较合理地解决深水推进波的各种问题。但是根据这一理论，液体的旋转角速度不等于零，即

$$\omega = \omega_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x}\right)$$

$$= \frac{\pi k^2 h^2 e^{-2kz_0}}{2T\left(1 - \frac{1}{4}k^2 h^2 e^{-2kz_0}\right)}$$

这是与盖氏原假定水体是理想液体相矛盾的，因为从流体力学可知，理想液体在有势力作用下从静止转入运动的整个过程中，都不会发生有旋运动。这是盖氏圆余摆线理论的一个缺陷。

二、浅水推进波

如前所述，当波浪从深水区进入浅水区时，因受水底边界影响，水质点从作圆周运动逐渐变为椭圆运动，波浪形态亦从深水推进波转变为浅水推进波。下面介绍鲍辛耐斯克(J. Boussinesq)提出的浅水推进波椭圆余摆线理论。

鲍辛耐斯克首先提出以下假定：

1. 水体为理想液体，不计摩阻力。水深为有限值，水底对波浪运动有影响。

2. 每一水质点均在铅直平面上作非等速椭圆运动，称为轨迹椭圆(图 17.15)，椭圆长轴为水平方向，短轴为铅直方向。椭圆中心超出质点静止位置的高度即为超高。

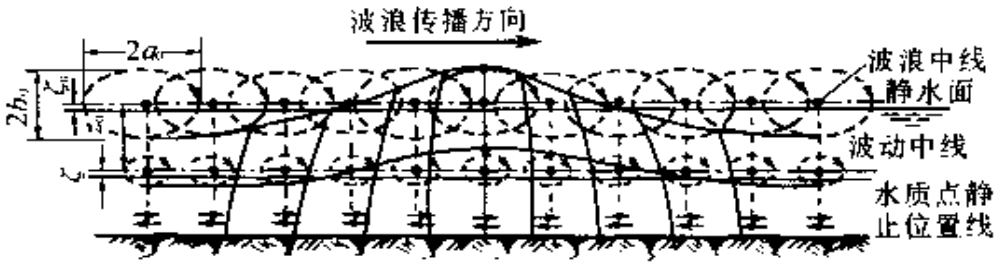


图 17.15

3. 静止时位于同一水平面上的水质点波动时所形成的曲面

称为波动面。同一波动面上各水质点的轨迹椭圆大小相同;沿铅直方向随着深度的增加椭圆形状逐渐趋于扁平。

4. 在同一波动面上,水质点的相角随波浪传播方向的距离的增大而减小;同一瞬时椭圆中心位于同一铅垂线上的水质点的相角相等。当水质点作椭圆运动时,虽然在椭圆上的切向速度不相等,但相角的角速度是相等的。

在上述假定的基础上,鲍氏首先提出浅水推进波的基本方程,然后分别研究浅水推进波的其他特性。

(一)基本方程

仍取波浪中线为 x 轴,沿波浪传播方向为正;取铅垂线为 z 轴,向下为正(图 17.16)。任一水质点 m 的轨迹椭圆的内外辅助

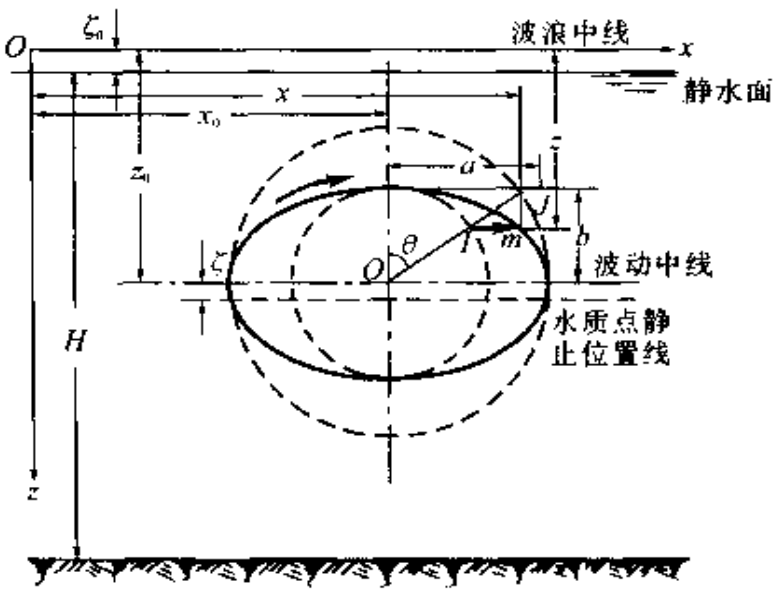


图 17.16

圆圆心坐标为$(x_0、z_0)$,则 m 点的坐标可表示为

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + a\sin\theta \\ z &= z_0 - b\cos\theta \end{aligned}\right\} \tag{17.39}$$

式中 $a、b$ 分别为轨迹椭圆的半长轴和半短轴;θ 为相角,但 θ 不是m 点与轨迹椭圆中心点的连线与通过中心点的垂线之间的夹角,而是内外辅助圆的径线与该垂线之间的夹角。从径线与内外

辅助圆的交点 I、J 分别引水平线和铅垂线，其交点 m 即为水质点的位置。相角 θ 仍表示为

$$\theta = \sigma t - kx_0$$

式中 σ 为相角速度；k 为相角随距离的变化率或转圆曲率。式(17.39)为浅水推进波质点运动基本方程。和深水推进波相类似，当波长、波周期、轨迹椭圆的半长轴和半短轴已知时，应用基本方程可求解浅水推进波的质点运动轨迹、波形曲线和动力垂线。

(二)波形曲线

仍分析 $t = 0$ 时刻的波形曲线。此时 $\theta = -kx_0$，即 $x_0 = -\frac{\theta}{k} = -R\theta$（$R$ 为转圆半径）。在水面上，$z_0 = 0$，$a = a_0$，$b = b_0$。代入式(17.39)得水面波形方程为

$$\left.\begin{aligned} x &= -R\theta + a_0\sin\theta \\ z &= -b_0\cos\theta \end{aligned}\right\} \tag{17.40}$$

设半径为 R 的大圆内有一椭圆，椭圆的大小辅助圆的半径分别为 a_0 及 b_0，取坐标 xOz 如图 17.17 所示。当大圆沿上方的水平切线自右向左滚动时，椭圆上的 m 点（与小辅助圆上的 C 点重合）所移动的椭圆轨迹即为以 $2b_0$ 为振幅的椭圆余摆线。设滚动时圆心从 O 点移至 O' 点，大圆及大小辅助圆上的 A、B、C 三点分别移动到 A'、B'、C' 点，转动角为 θ（相角）。从 B' 与 C' 点分别作铅直线和水平线，相交于 m' 点，该点即为椭圆余摆线上的相应点。从几何关系可知，m' 点的坐标（x、z）符合式(17.40)的关系，这表明浅水推进波的波形曲线为椭圆余摆线。椭圆余摆线的波峰部分比圆余摆线更为尖突，而波谷部分则更为坦长。

同理可以证明水面以下各波动面的波形曲线均为椭圆余摆线，其转圆半径仍为 $R = \frac{\lambda}{2\pi}$，而轨迹椭圆的半长轴 a 及半短轴 b 则较水面者为小，故其波形亦较水面波形平坦，并随深度的增大而愈加平坦，在水底处则成为一直线。

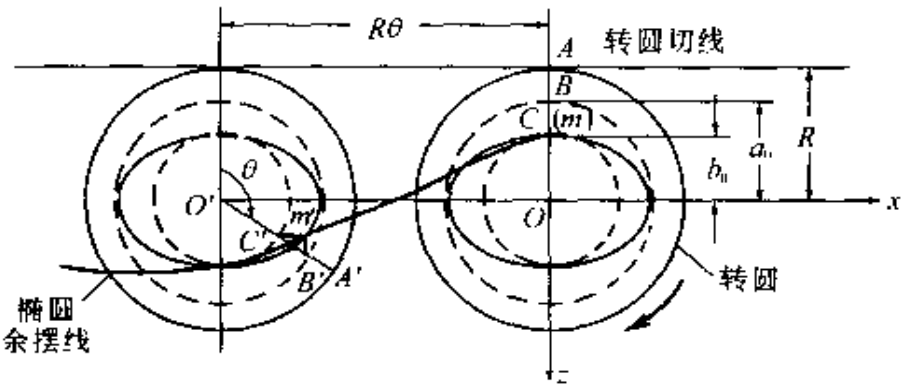


图 17.17

(三)轨迹椭圆半长轴、半短轴和焦距

将式(17.39)中的 x 及 z 分别对 x_0 及 z_0 求导,再代入拉格朗日连续方程(17.13)中,整理后得到满足连续方程所需的条件,经积分后并以边界条件代入,最后求得浅水推进波水质点轨迹椭圆的半长轴和半短轴分别为

$$\left.\begin{aligned} a &= \frac{h}{2}\frac{\cosh k(H-z_0)}{\sinh kH} \\ b &= \frac{h}{2}\frac{\sinh k(H-z_0)}{\sinh kH} \end{aligned}\right\} \tag{17.41}$$

式中 h 为波高;H 为水深。由上式知,a 和 b 值随深度 z_0 的增大而减小。

在水面上,$z_0=0$,则半长轴和半短轴分别为

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= \frac{h}{2}\coth kH \\ b_0 &= \frac{h}{2} \end{aligned}\right\} \tag{17.42}$$

在水底,$z_0=H$,则得

$$\left.\begin{aligned} a_H &= \frac{h}{2}\frac{1}{\sinh kH} \\ b_H &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{17.43}$$

椭圆焦距为

$$f = 2\sqrt{a^2 - b^2} = \frac{h}{\sinh kH} = 2a_H \tag{17.44}$$

可见水质点的轨迹椭圆随深度 z_0 的增加而逐渐趋于扁平，但焦距保持不变。在水底处，质点沿水平长轴 $2a_H$（即焦距 f）范围内作往复直线运动。

根据连续方程要求，浅水推进波的质点运动还应满足下列方程：

$$k^2(a^2 - b^2) = \left(\frac{h}{\lambda}\right)^2 \frac{\pi^2}{\sinh^2 kH} = 0$$

由上式可知，只有波高与波长之比 $\frac{h}{\lambda}$ 为无限小或水深 H 为无限大时才能满足上式。但因浅水推进波的 $\frac{h}{\lambda}$ 一般均为有限值，不可能为无限小，而 H 为无限大时已经属于深水推进波的范畴，故上列连续方程要求的条件不可能得到满足，这是鲍辛耐斯克椭圆余摆线理论的一个缺陷。

例 17.4 有一浅水推进波，波高 $h = 1.8$ m，波长 $\lambda = 16$ m，水深 $H = 5$ m。问水面质点轨迹椭圆的半长轴和半短轴各等于深度 $z_0 = 3$ m 处质点的几倍？轨迹椭圆的焦距为多少？

解： 转圆曲率 $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{16\text{ m}} = 0.393\text{ m}^{-1}$

水面质点轨迹椭圆的半长轴和半短轴分别为

$$a_0 = \frac{h}{2}\coth kH = \frac{1.8\text{ m}}{2}\coth(0.393\text{ m}^{-1} \times 5\text{m}) = 0.936\text{ m}$$

$$b_0 = \frac{h}{2} = \frac{1.8\text{ m}}{2} = 0.9\text{ m}$$

$z_0 = 3$ m 处质点轨迹椭圆的半长轴和半短轴分别为

$$a = \frac{h}{2}\frac{\cosh k(H - z_0)}{\sinh kH}$$

$$= \frac{1.8\text{ m}}{2}\frac{\cosh[0.393\text{ m}^{-1} \times (5\text{ m} - 3\text{ m})]}{\sinh(0.393\text{ m}^{-1} \times 5\text{ m})} = 0.341\text{ m}$$

$$b = \frac{h}{2}\frac{\sinh k(H - z_0)}{\sinh kH}$$

$$= \frac{1.8\text{m}}{2} \frac{\sinh[0.393\ \text{m}^{-1} \times (5\ \text{m} - 3\ \text{m})]}{\sinh(0.393\ \text{m}^{-1} \times 5\ \text{m})} = 0.224\ \text{m}$$

水面质点轨迹椭圆半长轴和半短轴各等于 $z_0 = 3$ m 处质点的倍数为

$$\frac{a_0}{a} = \frac{0.936\ \text{m}}{0.341\ \text{m}} = 2.745$$

$$\frac{b_0}{b} = \frac{0.9\ \text{m}}{0.224\ \text{m}} = 3.698$$

(四)质点运动速度

和深水推进波不同,浅水推进波水质点在椭圆轨道上的运动速度是随时间变化的。由式(17.39)可求得质点速度 u 的水平分速和铅垂分速分别为

$$\left.\begin{aligned} u_x &= \frac{\partial x}{\partial t} = \sigma a \cos\theta \\ u_z &= \frac{\partial z}{\partial t} = \sigma b \sin\theta \end{aligned}\right\} \tag{17.45}$$

于是得

$$u = \sqrt{u_x^2 + u_z^2} = \sigma \sqrt{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta} \tag{17.46}$$

当质点位于椭圆短轴两端的波顶和波底点时,则有 $\theta = n\pi$($n = 0,1,2,\cdots$),$\sin\theta = 0$,$\cos\theta = \pm 1$,故质点铅垂分速为零,水平分速达到最大值 $u_{x_{\max}}$,并等于质点在椭圆上的最大速度 $u_{\max}$,即

$$u_{max} = u_{x_{\max}} = \pm \sigma a = \pm \frac{h}{2} \frac{\cosh k(H - z_0)}{\sinh kH} \sqrt{\frac{2\pi g}{\lambda} \tanh kH} \tag{17.47}$$

式中的正、负号分别表示速度沿正、负不同的方向。在水面上,$z_0 = 0$,其最大速度为

$$u_{o_{\max}} = u_{ox_{\max}} = \pm \frac{h}{2} \sqrt{\frac{2\pi g}{\lambda} \coth kH} \tag{17.48}$$

在水底处,$z_0 = H$,其最大速度为

$$u_{H_{\max}} = u_{Hx_{\max}} = \pm h \sqrt{\frac{\pi g}{\lambda \sinh 2kH}} \tag{17.49}$$

当质点位于椭圆长轴两端点时，则有 $\theta = n\pi + \frac{\pi}{2}(n = 0, 1, 2, \cdots)$，$\sin\theta = \pm 1$，$\cos\theta = 0$，故质点水平分速为零，铅垂分速达到最大值 $u_{z\max}$，并等于质点在椭圆上的最小速度 $u_{\min}$，即

$$u_{\min} = u_{z\max} = \pm \sigma b = \pm \frac{h}{2} \frac{\sinh k(H - z_0)}{\sinh kH} \sqrt{\frac{2\pi g}{\lambda} \tanh kH} \tag{17.50}$$

（五）超高

应用与深水推进波相类似的方法可求得浅水推进波任一波动中线的超高为

$$\zeta = \frac{\pi ab}{\lambda} \tag{17.51}$$

可见浅水推进波的超高等于质点轨迹椭圆的面积与波长之比。

在水面上，波浪中线的超高为

$$\zeta_0 = \frac{\pi a_0 b_0}{\lambda} = \frac{\pi h^2}{4\lambda} \coth kH \tag{17.52}$$

根据式(17.48)，水面质点的最大流速水头为

$$\frac{u_{0_{\max}}^2}{2g} = \frac{\pi h^2}{4\lambda} \coth kH \tag{17.53}$$

比较以上二式可知，浅水推进波的水面超高 ζ_0 恰等于水面质点的最大流速水头。

比较式(17.52)与式(17.18)可知，当波高和波长相同时，因 $\coth kH > 1$，浅水推进波的水面超高大于深水推进波的水面超高，且水深越小超高越大。

（六）波周期和波速

应用基本方程(17.39)中的 x 及 z 分别对 x_0、z_0 和 t 求出相应的偏导数，代入拉格朗日运动方程(17.14)中进行积分，可得

$$\frac{p}{\rho} = gz_0 - (gb - \frac{\sigma^2 a}{k})\cos\theta + \frac{\sigma^2 a^2}{2} + C \tag{17.54}$$

式中 C 为积分常数。在水面上，$z_0 = 0$，$a = a_0$，$b = b_0$，$p = 0$，代入

上式得

$$C = \left(gb_0 - \frac{\sigma^2 a_0}{k}\right)\cos\theta - \frac{\sigma^2 a_0^2}{2} \tag{17.55}$$

式中除 $\cos\theta$ 外，其他各量均为常量，故只有在

$$gb_0 - \frac{\sigma^2 a_0}{k} = 0 \tag{17.56}$$

的条件下式(17.55)才能成立，即满足运动方程。将 $\sigma = \frac{2\pi}{T}$ 及 $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ 代入式(17.56)，可求得浅水推进波的周期

$$T = \sqrt{\frac{2\pi\lambda}{g}\frac{a_0}{b_0}} = \sqrt{\frac{2\pi\lambda}{g}}\sqrt{\coth kH} \tag{17.57}$$

波速

$$c = \frac{\lambda}{T} = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}\sqrt{\tanh kH} \tag{17.58}$$

可见浅水推进波的周期和波速不仅与波长有关，且随水深而变化。

比较浅水推进波与深水推进波的周期和波速公式可知，由于 $\tanh kH < 1$，$\coth kH > 1$，当波长相同时，浅水推进波的周期大于深水推进波的周期，而浅水推进波的波速则小于深水推进波的波速。

当 $\frac{H}{\lambda} \geqslant \frac{1}{2}$ 时，$\tanh kH \approx 1$，$\coth kH \approx \frac{1}{kH}$，则式(17.57)和式(17.58)分别成为 $T = \sqrt{\frac{2\pi\lambda}{g}}$ 和 $c = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}$，与深水推进波的公式相同，因此在实际计算中取 $\frac{H}{\lambda} = \frac{1}{2}$ 作为区分深水推进波与浅水推进波的界限是合理的。

当 $\frac{H}{\lambda} \leqslant \frac{1}{25}$ 时，$\tanh kH \approx kH$，$\coth kH \approx \frac{1}{kH}$，则式(17.57)和式(17.58)分别写为

$$T = \frac{\lambda}{\sqrt{gH}} \tag{17.59}$$

和

$$c = \sqrt{gH} \tag{17.60}$$

由于这种浅水推进波的波长为水深的25倍以上，故称长波。长波的波速只与水深有关，而与波长无关，潮汐波和明渠中发生非恒定流动的波均属于长波。

例 17.5 按例 17.2 的条件，当波浪推进到水深 $H = 4\ \text{m}$ 处，求波周期及波速。

解： 因 $\frac{H}{\lambda} = \frac{4\ \text{m}}{15\ \text{m}} = 0.267 < \frac{1}{2}$，可知原深水推进波已转变为浅水推进波。

转圆曲率

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{15\ \text{m}} = 0.419\ \text{m}^{-1}$$

由式(17.57)得波周期

$$T = \sqrt{\frac{2\pi\lambda}{g}\coth kH} = \sqrt{\frac{2\pi \times 15\ \text{m}}{9.81\ \text{ms}^{-2}}\coth(0.419\ \text{m}^{-1} \times 4\ \text{m})}$$

$$= 3.21\ \text{s}$$

由式(17.58)得波速

$$c = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}\tanh kH} = \sqrt{\frac{9.81\ \text{ms}^{-2} \times 15\ \text{m}}{2\pi}\tanh(0.419\ \text{m}^{-1} \times 4\ \text{m})}$$

$$= 4.67\ \text{m/s}$$

(七)波压强

将式(17.56)代入式(17.55)得 $C = -\frac{\sigma^2 a_0^2}{2}$。再将 C 及 T、a、b、a_0 等关系式代入式(17.54)，整理可得浅水推进波波压强关系式为

$$\frac{p}{\rho g} = z_0 - \frac{\pi h^2}{4\lambda}\coth kH\left[1 - \frac{\cosh^2 k(H - z_0)}{\cosh^2 kH}\right]$$

$$+ \frac{h}{2}\left[\frac{\cosh k(H - z_0)}{\cosh kH} - \frac{\sinh k(H - z_0)}{\sinh kH}\right]\cos\theta \quad (17.61)$$

因 $\cos\theta$ 为时间 t 的函数，上式表明浅水推进波质点所受的波压强随时间作周期性变化，这与深水推进波质点的波压强等于常数是有所不同的。此外，浅水推进波除水面的波动面外，水下各波动面均不是等压面。

式(17.61)中的 $\cos\theta$ 在 -1 至 $+1$ 范围内变化。在通过波顶点的铅垂线上，$\cos\theta = 1$，波压强有最大值；在通过波底点的铅垂线上，$\cos\theta = -1$，波压强有最小值。将 $\cos\theta = \pm 1$ 代入式(17.61)，可得通过波顶及波底垂线的波压强关系式为

$$\frac{p}{\rho g} = z_0 - \frac{\pi h^2}{4\lambda}\coth kH\left[1 - \frac{\cosh^2 k(H - z_0)}{\cosh^2 kH}\right] \pm \frac{h}{2}\left[\frac{\cosh k(H - z_0)}{\cosh kH} - \frac{\sinh k(H - z_0)}{\sinh kH}\right] \quad (17.62)$$

在水底处，$z_0 = H$，并注意到 $\zeta_0 = \frac{\pi h^2}{4\lambda}\coth kH$，代入上式得通过波顶及波底垂线底部的波压强为

$$\frac{p}{\rho g} = H - \zeta_0\left(1 - \frac{1}{\cosh^2 kH}\right) \pm \frac{h}{2\cosh kH} \quad (17.63)$$

一般情况下，上式右边第二项 $\zeta_0\left(1 - \frac{1}{\cosh^2 kH}\right)$ 与一、三两项相比要小得多，可以忽略，则式(17.63)可简化为

$$\frac{p}{\rho g} = H \pm \frac{\Delta p_H}{\rho g} \quad (17.64)$$

式中 $\frac{\Delta p_H}{\rho g} = \frac{h}{2\cosh kH}$，为水底净波压强水头。

通过浅水推进波波顶铅垂线 A_1B_1 和波底铅垂线 A_2B_2 的波压强分布图可用式(17.62)和式(17.64)绘出，如图 17.18 所示。图中直线 A_1C_1、A_2C_2 和曲线 $A_1'D_1$、$A_2'D_2$ 分别为波顶和波底垂线的静水压强分布线和波压强分布曲线。波压强分布曲线 $A_1'D_1$ 和 $A_2'D_2$ 亦可近似用直线 $A_1'D_1$ 和 $A_2'D_2$(图中的虚线)来代替。图中阴影线所示为净波压强分布图。在波顶垂线上，净波压强为正值；最大净波压强发生在静水面上，其值为

$$\Delta p_{max} = A_1''A_1 = \frac{\left(\frac{h}{2} + \zeta_0\right)(\rho g H + \Delta p_H)}{\frac{h}{2} + \zeta_0 + H} \quad (17.65)$$

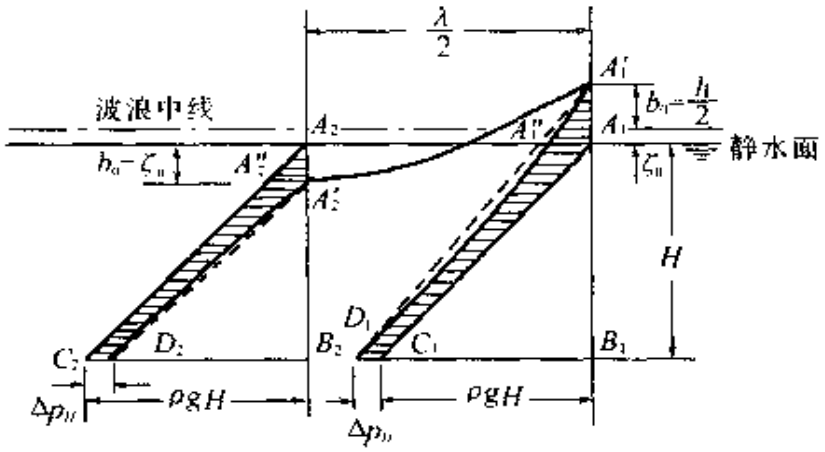


图 17.18

最小净波压强发生在波底处，其值为

$$\Delta p_{\min} = -A_2''A_2' = -\rho g\left(\frac{h}{2} - \zeta_0\right) \tag{17.66}$$

(八)波能量

浅水推进波的波能亦分为动能和势能两部分。和深水推进波不同，浅水推进波水质点不作等速运动，其动能不等于常数。在一个波周期内质量为 δm 的质点的平均动能为

$$\delta\bar{E}_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\delta m u^2 \mathrm{d}\theta = \frac{\delta m}{4\pi}\int_0^{2\pi}\sigma^2(a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$= \delta mg\frac{\pi}{2\lambda}(a^2 + b^2)\tanh kH \tag{17.67}$$

在整个水深范围内，底面积为 1 个单位的水体的平均动能为

$$\bar{E}_k = \int_0^H \rho g\frac{\pi}{2\lambda}(a^2 + b^2)\tanh kH \cdot \mathrm{d}z_0 = \frac{\rho g h^2}{16} \tag{17.68}$$

因水质点作椭圆运动，在一个周期内质点的平均位置为椭圆中心，故质点的平均势能为

$$\delta\bar{E}_p = \delta mg\zeta = \delta mg\frac{\pi ab}{\lambda} \tag{17.69}$$

在整个水深范围内，底面积为 1 个单位的水体的平均势能为

$$E_p = \int_0^H \rho g\left(\frac{\pi ab}{\lambda}\right)\mathrm{d}z_0 = \frac{\rho g h^2}{16} \tag{17.70}$$

在上述范围内水体的平均总波能为

$$\bar{E} = \bar{E}_k + \bar{E}_p = \frac{\rho g h^2}{8} \tag{17.71}$$

按深水推进波相类似的方法可求得浅水推进波的波能流量为

$$\Phi = \frac{1}{2}\bar{E}c\left(1 + \frac{2kH}{\sinh 2kH}\right) \tag{17.72}$$

由上式知，波能传递速度为 $\frac{1}{2}c\left(1 + \frac{2kH}{\sinh 2kH}\right)$，它大于深水推进波的波能传递速度 $\frac{1}{2}c$。

(九)临界水深

浅水推进波向岸边推进时，由于水深减小，波能相对集中，波高和波陡相应增大。当波陡增大到一定程度，波峰将失去平衡而发生波浪破碎，波浪破碎时的相应水深即为临界水深 H_c。理论上的临界水深可由波形的极限情况求得。

椭圆余摆线波形的极限情况为椭圆摆线，此时，表面水质点轨迹椭圆的半长轴 a_0 等于转圆半径。由式(17.42)可得

$$\frac{h}{2}\coth kH_c = \frac{\lambda}{2\pi}$$

从而解得

$$H_c = \frac{\lambda}{2\pi}\operatorname{arcoth}\left(\frac{\pi h}{\lambda}\right) = \frac{\lambda}{4\pi}\ln\left(\frac{\lambda + \pi h}{\lambda - \pi h}\right) \tag{17.73}$$

实际上临界水深与波高、波陡、水底坡度、糙率、地形、风向和水流方向等因素有关，实测的临界水深常比上述理论值大得多。据实际观测，临界水深的大致范围为

$$H_c = (0.75 \sim 2.0)h$$

由于影响临界水深的因素相当复杂，一般应通过现场实测求得；如

无实测资料，亦可根据与波浪有关的技术规范* 来确定。

第五节　有限振幅立波

以上叙述的深水推进波和浅水推进波的有关运动特性是波浪传播时未遇到任何阻碍的情况。若波浪传播时遇到防波堤、码头、堤坝、闸门等不同类型的建筑物，将受到建筑物的反作用而发生反射、破碎、绕流等现象，使波浪运动特性发生变化。当波浪遇到具有铅直墙面的直墙式建筑物时将发生反射现象。波浪的反射和一般横波的反射原理相同，反射波以与原始推进波（简称原波）和建筑物的交角相等的反射角从建筑物的直墙面上反射出来。原波与反射波在建筑物前面叠加而成的波称为干涉波。若波浪行进方向与建筑物直墙面相垂直，则在墙前发生的干涉波称为立波。立波是干涉波的一种特殊情况，它是原波和反射波互相干扰和抵消最少、叠加最完整的干涉波，因而其波高和波压力等也最大。此外，当波浪遇到墙面倾斜的斜坡式建筑物时，波浪将发生部分反射现象；建筑物坡面愈平缓，波浪的反射愈小；当斜面坡度小于$\frac{1}{10}$时，波浪将在斜面上破碎而不发生反射。当波浪遇到孤立式建筑物（如灯塔、码头下的桩柱、水库进水塔等），则波浪基本不反射而从建筑物两侧绕过，即发生绕流现象。

尽管立波是一种特殊的干涉波，出现的机遇也较少，但它对建筑物的影响却最大，是工程设计时必须考虑的情况。本节着重介绍有限振幅立波的基本运动规律及其对直墙式建筑物的作用。

图 17.19 所示为原波和反射波在直墙前互相叠加形成的立波在一个波周期内的波动情况。两个波系具有相同的波高、波长和周期。图中两个相邻图形相应的时间间隔为$\frac{1}{4}$周期，相应的波形

---

* 中华人民共和国交通部．港口工程技术规范（第一册）·海港水文，人民交通出版社，1978 年。

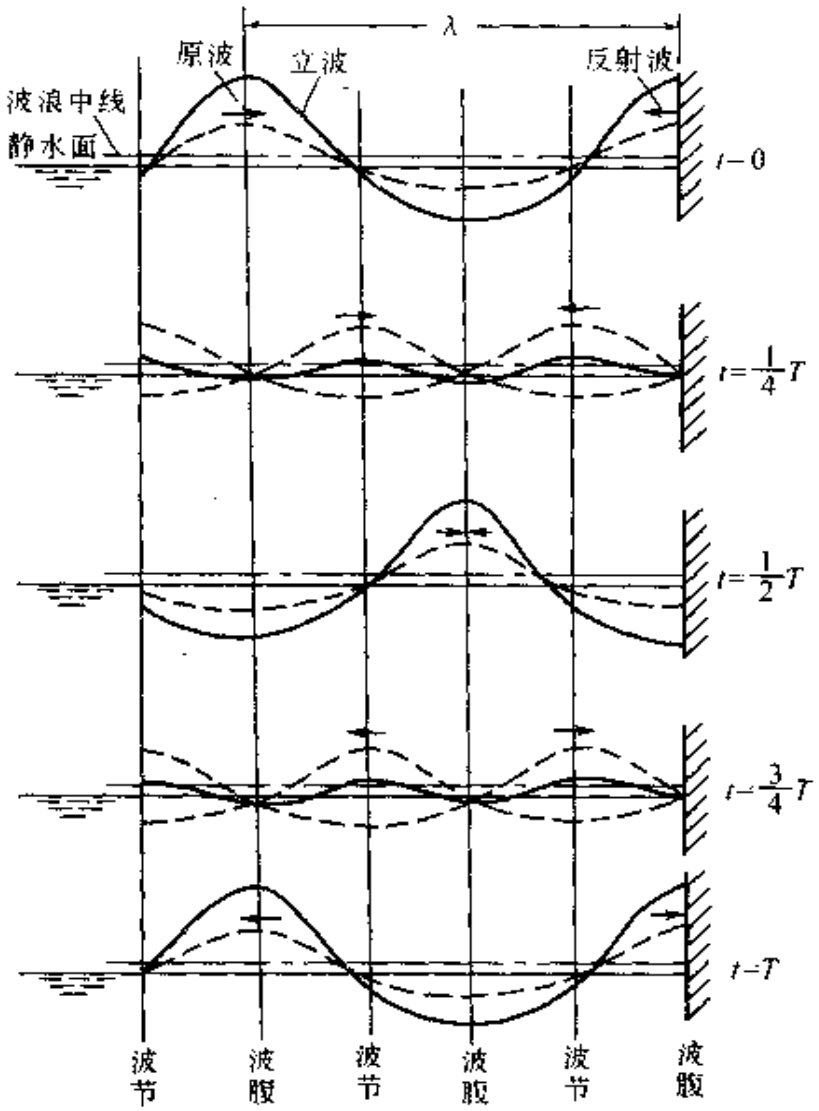


图 17.19

运动距离为$\frac{1}{4}$波长。图中虚线表示原波和反射波，实线表示叠加后的立波。由图可见立波的波长和周期与原波相同，而波形和波幅(即波高)随时间而变化，最大波高为原波波高的二倍。离墙面$\frac{1}{4}\lambda, \frac{3}{4}\lambda, \frac{5}{4}\lambda, \cdots$处波面几乎没有升降，这些点称为波节。在墙面上和离墙面$\frac{1}{2}\lambda, \lambda, \frac{3}{2}\lambda, \cdots$处交替出现波峰和波谷，这些点称为波腹。由于立波波形并不向前传播，其波面只在波节之间作周期性

起伏运动，故称为立波或驻波。

立波的质点运动轨迹不再是封闭曲线而是抛物线，抛物线的主轴为通过波节的铅垂线，其线形弯曲向上，每个质点均在抛物线的某一段距离上作往复运动，如图 17.20 所示。

设墙前波面通过静水面时某水质点位于 O 点，当墙前波面升至最高位置时，该质点亦上升至最高点 O'；当波面下降至最低位置时，该质点亦下降至最低点 O''。图 17.21 表示一个波周期内质点的速度 u、加速度 $\frac{du}{dt}$ 随波面升降而变化的关系，图中波面位置为零相应于波面在原来静止时的位置。由图可见质点在原静止位置时速度最大，加速度为零；质点在最高或最低位置时速度为零，而加速度则最大。

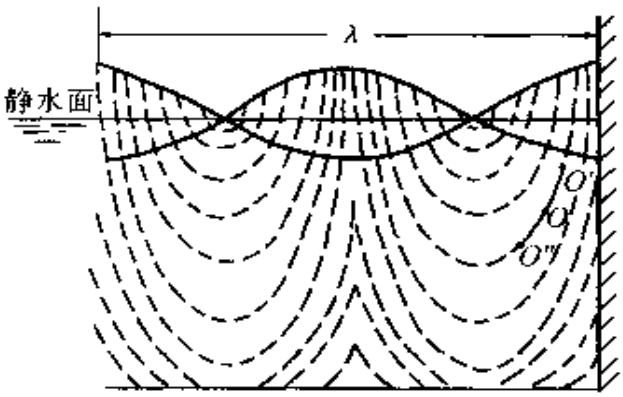


图 17.20

立波也分为深水立波和浅水立波两类，它们分别由深水推进波和浅水推进波遇到直墙式建筑物所形成。由于两种立波有不同的运动规律，故分别进行论述。

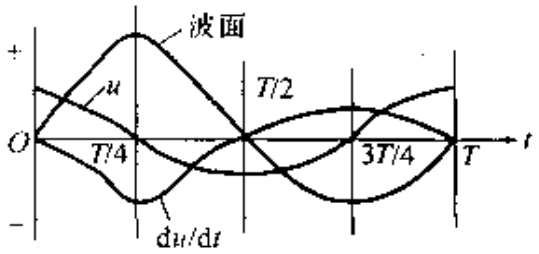


图 17.21

一、深水立波

(一)基本方程

鲍辛耐斯克认为当水深为无限时深水立波水质点运动的基本方程可写为

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + 2r\sin\sigma t\cos kx_0 \\ z &= z_0 - 2r\sin\sigma t\sin kx_0 \\ &\quad - 2kr^2\sin^2\sigma t \end{aligned}\right\} \tag{17.74}$$

式中 x、z 为深水立波质点坐标；x_0、z_0 为质点静止时的坐标，而不是原深水推进波质点轨迹圆中心坐标；r、σ、k 分别为原波的质点轨迹圆半径、角速度和转圆曲率。与深水推进波不同，立波的波浪中线随时间变化，故取静水面为 x 轴，以原波传播方向为正；取通过某一波节点的铅垂线为 z 轴，向下为正。

（二）波形曲线

如令 $x_0' = x_0$，$z_0' = z_0 - 2kr^2\sin^2\sigma t$，$r' = 2r\sin\sigma t$，$\theta' = \frac{\pi}{2} - kx_0$，则式(17.74)可改写为

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0' + r'\sin\theta' \\ z &= z_0' - r'\cos\theta' \end{aligned}\right\} \tag{17.75}$$

上式与深水推进波基本方程(17.15)有相同的形式，可见深水立波的波形曲线也是圆余摆线。

（三）波高

在水面上，$r' = r_0' = 2r_0\sin\sigma t$，其波高为

$$h' = 2r_0' = 4r_0\sin\sigma t \tag{17.76}$$

可见深水立波的波高是时间的函数。当 $\sin\sigma t = 1$ 时波高最大，其最大波高 $h'_{max} = 4r_0 = 2h$，恰为原波波高的二倍；当 $\sin\sigma t = 0$ 时波高为零，达到最小值。

（四）超高

由于深水立波的波形曲线也是圆余摆线，可用与深水推进波相类似的方法求得任一波动面的超高为

$$\zeta' = \frac{\pi r'^2}{\lambda} = 4\frac{\pi r^2}{\lambda}\sin^2\sigma t = 4\zeta\sin^2\sigma t \tag{17.77}$$

水面超高为

$$\zeta_0' = \frac{\pi r_0'^2}{\lambda} = 4\frac{\pi r_0^2}{\lambda}\sin^2\sigma t = 4\zeta_0\sin^2\sigma t \tag{17.78}$$

可见深水立波的超高也是时间的函数。当 $\sin\sigma t = 1$ 时超高最大，最大超高 $\zeta'_{max} = 4\zeta$，最大水面超高 $\zeta_0'_{max} = 4\zeta_0$，恰为原波超高的4倍；当 $\sin\sigma t = 0$ 时超高为零，达到最小值。

（五）质点运动轨迹

由式(17.75)消去时间 t，可得深水立波质点运动轨迹方程为

$$z = z_0 - (x - x_0)\tan kx_0 - \frac{k(x - x_0)^2}{2\cos^2 kx_0} \tag{17.79}$$

可见深水立波质点的轨迹为一段抛物线，抛物线的主轴是通过波节点的铅垂线。

在波节处，$x_0 = n\frac{\lambda}{2}(n = 0, 1, 2, \cdots)$，$kx_0 = n\pi$，$\sin kx_0 = 0$，$\cos kx_0 = \pm 1$，代入式(17.74)可得

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 \pm 2r\sin\sigma t \\ z &= z_0 - 4\zeta\sin^2\sigma t = z_0 - \zeta' \end{aligned}\right\} \tag{17.80}$$

式中 ζ 为原波超高；ζ' 为深水立波超高。由上式可知，在一个周期内波节处的水质点主要作水平往复运动，因 $\sin\sigma t$ 在 $+1$ 至 -1 范围内变化，故其水平运动范围为 $4r$；在铅垂方向则在其静止位置至最大超高 $\zeta'_{max} = 4\zeta$ 范围内稍作升降。当墙前出现最大波峰和波谷时，水质点升至最高的波动中线位置。

在波腹处，$x_0 = \frac{\lambda}{4} + n\frac{\lambda}{2}(n = 0, 1, 2, \cdots)$，$kx_0 = \frac{\pi}{2} + n\pi$，$\sin kx_0 = \pm 1$，$\cos kx_0 = 0$，代入式(17.74)可得

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 \\ z &= z_0 \mp 2r\sin\sigma t - 4\zeta\sin^2\sigma t = z_0 \mp r' - \zeta' \end{aligned}\right\} \tag{17.81}$$

可见在波腹处水质点只在 $4r$ 范围内作周期性的上下运动。

（六）对鲍氏理论的检验

下面检验鲍辛耐斯克深水立波理论是否满足连续方程。对式(17.74)求出有关偏导数，再代入连续方程(17.13)，整理后得

$$\frac{\partial}{\partial t}(1 - 8k^3r^3\sin^3\sigma t\sin kx_0) = 0$$

可见，只有当 $8k^3r^3=(2kr)^3=(\frac{4\pi r}{\lambda})^3=(\frac{h}{\lambda}\pi e^{-kz_0})^3=0$ 时才能满足连续方程。显然只有波陡 $\frac{h}{\lambda}\approx 0$ 时才能满足此式，而波陡越大，误差也越大，因此鲍氏深水立波理论也是不够完善的。

(七)波压强和波压力

为了求得深水立波波压强分布规律，可对式(17.74)求出相应的偏导数，再代入运动方程(17.14)进行积分。但因该方程不能化为全微分形式，无法积分。工程中最关心的是立波作用于直墙面上的波压力，故只需研究波压强沿 z 向的变化规律。在考虑了 $8k^3r^3=0$ 的近似条件，对式(17.14)中的第二式简化后进行积分，并应用水面的边界条件确定积分常数后，可得深水立波压强沿铅垂线的分布规律为

$$\frac{p}{\rho g}=z_0-2k(r^2-r_0^2)\cos 2\sigma t \tag{17.82}$$

可见深水立波质点的波压强随时间而变化。当直墙前出现最大波峰和波谷时，$t=\frac{1}{4}T$ 和 $t=\frac{3}{4}T$，$\cos 2\sigma t=-1$，代入上式得

$$\begin{aligned}\frac{p}{\rho g}&=z_0-2k(r_0^2-r^2)=z_0-\frac{4\pi}{\lambda}(r_0^2-r^2)\\&=z_0-\zeta_{0\max}'+\zeta_{\max}'\end{aligned} \tag{17.83}$$

由上式可知，当墙前出现最大波峰和波谷时，深水立波同一质点所受的波压强是相等的。

根据式(17.83)和各水质点在直墙面上的位置(根据相应时刻 t 由基本方程算出)可绘出墙前出现最大波峰和波谷时沿直墙面的压强分布图，如图 17.22 所示。由于深水立波是深水推进波及其反射波叠加而成的，故可认为在水深 $H=\frac{\lambda}{2}$ 处水质点已无波动，该处压强等于静水压强。当墙前出现最大波峰时，静水面上的 A 点上升到 A_1 点，图中曲线 A_1C_1 为波压强分布线，直线 AC_1 为静水压强分布线，两线之间的阴影线部分为净波压强分布图。由于

波压强大于静水压强，净波压强为正值。为简便起见，可近似认为波压强按直线分布（图中的虚线 A_1C_1）。最大净波压强发生在静

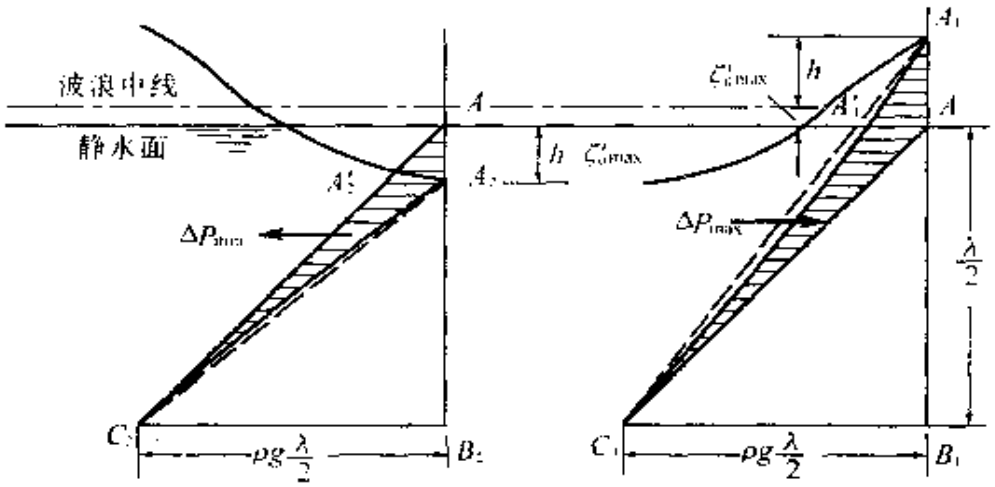


图 17.22

水面 A 点处，其值为

$$\Delta p_{\max} = A_1'A = \frac{\rho g\lambda}{2}\left(\frac{h + \zeta_{0\max}'}{h + \zeta_{0\max}' + \frac{\lambda}{2}}\right) = \frac{\rho g\lambda}{2}\left(\frac{h + \frac{\pi h^2}{\lambda}}{h + \frac{\pi h^2}{\lambda} + \frac{\lambda}{2}}\right) \tag{17.84}$$

直墙面上的单宽最大总净波压力等于三角形 A_1C_1A 的面积，即

$$\Delta P_{\max} = \frac{1}{2}A_1A \cdot C_1B_1 = \frac{\rho g}{2}(h + \zeta_{0\max}')\frac{\lambda}{2}$$

$$= \frac{\rho gh}{4}(\lambda + \pi h) \tag{17.85}$$

当墙前出现最大波谷时，静水面上的 A 点下降到 A_2 点，图中曲线 A_2C_2 为波压强分布线，直线 AC_2 为静水压强分布线，两线之间的阴影线部分为净波压强分布图。由于波压强小于静水压强，净波压强为负值。亦可近似认为波压强按直线分布（图中的虚线 A_2C_2）。最小净波压强发生在波底 A_2 点处，其值为

$$\Delta p_{\min} = -A_2'A_2 = -\rho g(h - \zeta_{0\max}') = -\rho gh\left(1 - \frac{\pi h}{\lambda}\right) \tag{17.86}$$

直墙面上的单宽最小总净波压力等于三角形 AC_2A_2 的面积，即

$$\Delta P_{\min} = -\frac{1}{2}AA_2 \cdot C_2B_2 = -\frac{\rho g}{2}(h - \zeta_0'_{\max})\frac{\lambda}{2}$$

$$= -\frac{\rho g h}{4}(\lambda - \pi h) \tag{17.87}$$

二、浅水立波

浅水立波为浅水推进波和它的反射波叠加而形成。因工程建筑物常建造在近岸浅水区，故研究浅水立波运动规律及其对建筑物的作用有着重要的意义。

(一)基本方程

1928 年森弗罗(G.Sainflou)提出了浅水立波理论，他提出的浅水立波水质点运动的基本方程为

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + 2a\sin\sigma t\cos kx_0 \\ z &= z_0 - 2b\sin\sigma t\sin kx_0 - 2kab\sin^2\sigma t \end{aligned}\right\} \tag{17.88}$$

式中 x、z 为浅水立波质点坐标；x_0、z_0 为质点静止时的坐标，而不是原浅水推进波质点轨迹椭圆中心坐标；a、b 分别为原波质点轨迹椭圆的半长轴和半短轴；σ、k 分别为原波质点的相角速度和转圆曲率。与深水立波的坐标相同，浅水立波亦取静水面为 x 轴，以原波传播方向为正；取通过某一波节点的铅垂线为 z 轴，向下为正。

(二)波形曲线

如令 $x_0' = x_0$，$z_0' = z_0 - 2kab\sin^2\sigma t$，$a' = 2a\sin\sigma t$，$b' = 2b\sin\sigma t$，$\theta' = \frac{\pi}{2} - kx_0$，则式(17.88)可改写为

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0' + a'\sin\theta' \\ z &= z_0' - b'\cos\theta' \end{aligned}\right\} \tag{17.89}$$

上式与浅水推进波基本方程(17.39)有相同的形式，可见浅水立波

的波形曲线也是椭圆余摆线，其椭圆的半长轴为 a'，半短轴为 b'，且均为时间的函数。

（三）波高

在水面上，$a' = a_0'$，$b' = b_0'$，其波高为

$$h' = 2b_0' = 4b_0\sin\sigma t \tag{17.90}$$

可见浅水立波的波高也是时间的函数。当 $\sin\sigma t = 1$ 时波高最大，最大波高 $h'_{max} = 4b_0 = 2h$，恰为原波波高的 2 倍；当 $\sin\sigma t = 0$ 时波高为零，达到最小值。

（四）超高

与浅水推进波相类似，可求得浅水立波任一波动面的超高为

$$\zeta' = \frac{\pi a'b'}{\lambda} = \frac{4\pi ab}{\lambda}\sin^2\sigma t = 4\zeta\sin^2\sigma t \tag{17.91}$$

水面超高为

$$\zeta_0' = \frac{\pi a_0'b_0'}{\lambda} = \frac{4\pi a_0 b_0}{\lambda}\sin^2\sigma t = 4\zeta_0\sin\sigma t \tag{17.92}$$

浅水立波的超高也是时间的函数。当 $\sin\sigma t = 1$ 时超高最大，最大超高 $\zeta'_{max} = 4\zeta$，最大水面超高 $\zeta_0'_{max} = 4\zeta_0$，恰为原波超高的 4 倍；当 $\sin\sigma t = 0$ 时超高为零，达到最小值。

（五）质点运动轨迹

由式(17.88)消去时间 t，可得浅水立波质点运动轨迹方程为

$$z = z_0 - \frac{b}{a}(x - x_0)\tan kx_0 - \frac{kb}{2a\cos^2 kx_0}(x - x_0)^2 \tag{17.93}$$

可见浅水立波质点的轨迹也是以通过波节点的铅垂线为主轴的抛物线。

在波节处，$\sin kx_0 = 0$，$\cos kx_0 = \pm 1$，代入式(17.88)可得

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 \pm 2a\sin\sigma t = x_0 \pm a' \\ z &= z_0 - 4\zeta\sin^2\sigma t = z_0 - \zeta' \end{aligned}\right\} \tag{17.94}$$

式中 ζ 为原波超高；ζ' 为浅水立波超高。由上式可知波节处水质点的水平运动范围为 $4a$，铅直方向运动范围为最大超高 $\zeta'_{max} =$

4ζ。在波节的水底处，$z_0 = H$，$a_H = \dfrac{h}{2\sinh kH}$，$b_H = 0$，则有

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 \pm \frac{h}{\sinh kH}\sin\sigma t \\ z &= H \end{aligned}\right\} \tag{17.95}$$

可知质点沿底面在$\dfrac{2h}{\sinh kH}$范围内作水平往复运动，其摆动幅度为浅水推进波底面质点摆动幅度的二倍。

在波腹处，$\sin kx_0 = \pm 1$，$\cos kx_0 = 0$，代入式(17.88)可得

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 \\ z &= z_0 \mp 2b\sin\sigma t - 2kab\sin^2\sigma t \end{aligned}\right\} \tag{17.96}$$

可见波腹处水质点只在$4b$范围内作周期性上下运动。

(六)质点运动速度

在浅水立波作用下，直墙前的底部常因流速过大而引起冲刷，故须了解水底处质点的运动速度。由浅水立波基本方程(17.88)可求得质点的水平分速为

$$u_x = \frac{\partial x}{\partial t} = 2\sigma a\cos kx_0\cos\sigma t \tag{17.97}$$

可知浅水立波质点的水平分速为 x_0、z_0 及 t 的函数。

在水底处，$a = a_H$，且质点只沿底面作水平运动，则其速度为

$$\begin{aligned} u_H = u_{Hx} &= 2\sigma a_H\cos kx_0\cos\sigma t \\ &= 2h\sqrt{\frac{\pi g}{\lambda\sinh 2kH}}\cos kx_0\cos\sigma t \end{aligned} \tag{17.98}$$

在波腹处，$\cos kx_0 = 0$，$u_H = 0$，水底质点静止不动；在波节处，$\cos kx_0 = \pm 1$，水底质点速度为

$$u_H = \pm 2h\sqrt{\frac{\pi g}{\lambda\sinh 2kH}}\cos\sigma t \tag{17.99}$$

当墙前出现最大波峰和波谷时，$\cos\sigma t = 0$，$u_H = 0$，波节处水底质点速度为零；当波面通过静水面时，$\cos\sigma t = \pm 1$，波节处水底质点速度达最大值

$$u_{H\max} = \pm 2h\sqrt{\frac{\pi g}{\lambda \sinh 2kH}} \tag{17.100}$$

可见浅水立波水底质点最大速度等于原浅水推进波水底质点最大速度为二倍。

(七)波压强和波压力

近岸浅水区直墙式建筑物设计中常需计算浅水立波作用在建筑物上的波压力。现先研究浅水立波的波压强分布规律。

对式(17.88)求出相应的偏导数,代入运动方程(17.14),同样由于不能化为全微分形式而无法普遍积分。现应用运动方程中的第二式,在略去含有$\frac{\pi^2}{\lambda^2}(a^2-b^2)$,$\frac{\pi^2}{\lambda^2}abg$,$(\frac{a}{\lambda})^3$和$(\frac{b}{\lambda})^3$的各微小项后,沿 z 向进行积分,可得浅水立波压强沿铅垂线的分布规律为

$$\frac{p}{\rho g} = z_0 + h\sin\sigma t\sin kx_0\left[\frac{\cosh k(H-z_0)}{\cosh kH} - \frac{\sinh k(H-z_0)}{\sinh kH}\right] \tag{17.101}$$

在直墙面上(即波腹处),$\sin kx_0 = 1$,则上式写为

$$\frac{p}{\rho g} = z_0 + h\sin\sigma t\left[\frac{\cosh k(H-z_0)}{\cosh kH} - \frac{\sinh k(H-z_0)}{\sinh kH}\right] \tag{17.102}$$

当墙前出现最大波峰和波谷时,$\sin\sigma t = \pm 1$,则有

$$\frac{p}{\rho g} = z_0 \pm h\left[\frac{\cosh k(H-z_0)}{\cosh kH} - \frac{\sinh k(H-z_0)}{\sinh kH}\right] \tag{17.103}$$

在水底处,$z_0 = H$,$p = p_H$,代入得

$$\frac{p_H}{\rho g} = H \pm \frac{h}{\cosh kH} = H \pm \frac{\Delta p_H}{\rho g} = H \pm h_H \tag{17.104}$$

式中 $h_H = \frac{\Delta p_H}{\rho g} = \frac{h}{\cosh kH}$,为水底处净波压强水头。

根据式(17.103)和(17.104)以及各水质点在直墙面上的位置可绘出墙前出现最大波峰和波谷时沿直墙面的压强分布图,如图17.23所示。当墙前出现最大波峰时,静水面上的 A 点上升到 A_1

点，图中曲线 A_1D_1 为波压强分布线，直线 AC_1 为静水压强分布线，两线之间的阴影线部分为净波压强分布图，且净波压强为正值。亦可近似认为波压强按直线分布（图中的虚线 A_1D_1）。最大

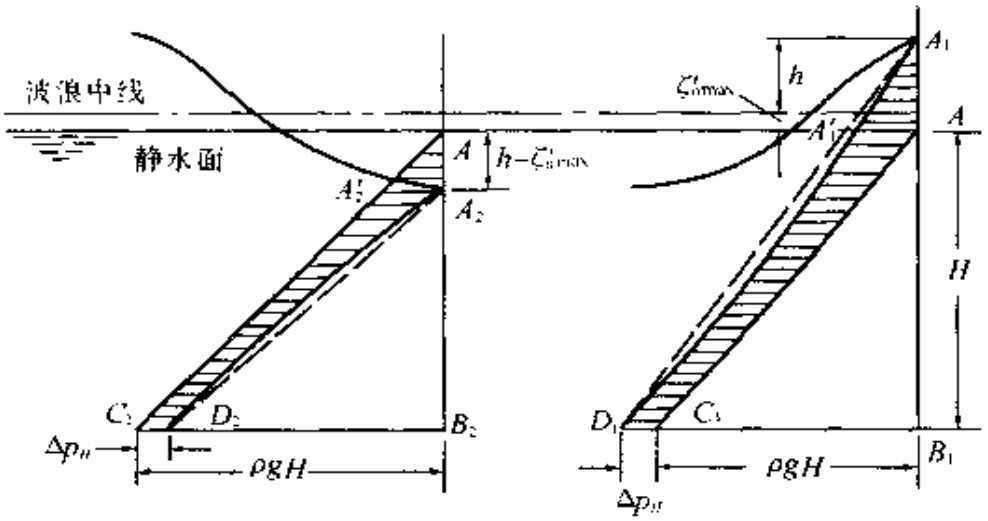


图 17.23

净波压强发生在静水面 A 点处，其值为

$$\Delta p_{\max} = \frac{\rho g(H + h_H)(h + \zeta_0'_{\max})}{h + \zeta_0'_{\max} + H} \tag{17.105}$$

直墙面上单宽最大总净波压力等于四边形 $A_1AC_1D_1$ 的面积，即

$$\Delta P_{\max} = \frac{1}{2}\rho g\{(h + \zeta_0'_{\max} + H)(H + h_H) - H^2\} \tag{17.106}$$

当墙前出现最大波谷时，静水面上的 A 点下降到 A_2 点，图中曲线 A_2D_2 为波压强分布线，直线 AC_2 为静水压强分布线，两线之间的阴影线部分为净波压强分布图，且净波压强为负值。亦可近似认为波压强按直线分布（图中的虚线 A_2D_2）。最小净波压强发生在波底 A_2 点处，其值为

$$\Delta p_{\min} = -\rho g(h - \zeta_0'_{\max}) \tag{17.107}$$

直墙面上单宽最小总净波压力等于四边形 $AA_2D_2C_2$ 的面积，即

$$\Delta P_{\min} = -\frac{1}{2}\rho g[H^2 - (H + \zeta_0'_{\max} - h)(H - h_H)] \tag{17.108}$$

例 17.6 按例 17.4 中浅水推进波的条件，当遇到直墙式建筑物时发生浅水立波，直墙前水深 $H = 5$ m。试求：墙面上最大净波压强和单宽最大总净波压力；墙面上最小净波压强和单宽最小总净波压力；墙前水底质点的最大速度。

解： 例 17.4 已求得 $k = 0.393\ \mathrm{m^{-1}}$，$a_0 = 0.936$ m，$b_0 = 0.9$ m，则原波水面超高

$$\zeta_0 = \frac{\pi a_0 b_0}{\lambda} = \frac{\pi \times 0.936\ \mathrm{m} \times 0.9\ \mathrm{m}}{16\ \mathrm{m}} = 0.165\ \mathrm{m}$$

浅水立波最大水面超高

$$\zeta_0'_{\max} = 4\zeta_0 = 4 \times 0.165\ \mathrm{m} = 0.66\ \mathrm{m}$$

水底处净波压强水头

$$h_H = \frac{h}{\cosh kH} = \frac{1.8\ \mathrm{m}}{\cosh(0.393\ \mathrm{m^{-1}} \times 5\ \mathrm{m})} = 0.495\ \mathrm{m}$$

墙面上最大净波压强

$$\Delta p_{\max} = \frac{\rho g(H + h_H)(h + \zeta_0'_{\max})}{h + \zeta_0'_{\max} + H}$$

$$= \frac{1000\ \mathrm{kg} \times 9.81\ \mathrm{ms^{-2}}(5\ \mathrm{m} + 0.495\ \mathrm{m})(1.8\ \mathrm{m} + 0.66\ \mathrm{m})}{1.8\ \mathrm{m} + 0.66\ \mathrm{m} + 5\ \mathrm{m}}$$

$$= 17.78\ \mathrm{kN/m^2}$$

墙面上单宽最大总净波压力

$$\Delta P_{\max} = \frac{1}{2}\rho g\{(h + \zeta_0'_{\max} + H)(H + h_H) - H^2\}$$

$$= \frac{1}{2} \times 1000\ \mathrm{kg} \times 9.81\ \mathrm{ms^{-2}}$$

$$[(1.8\ \mathrm{m} + 0.66\ \mathrm{m} + 5\ \mathrm{m})(5\ \mathrm{m} + 0.495\ \mathrm{m}) - (5\ \mathrm{m})^2]$$

$$= 78.44\ \mathrm{kN/m}$$

墙面上最小净波压强

$$\Delta p_{\min} = -\rho g(h - \zeta_0'_{\max}) = -1000\ \mathrm{kg} \times 9.81\ \mathrm{ms^{-2}}(1.8\ \mathrm{m}\text{-}0.66\ \mathrm{m})$$

$$= -11.18\ \mathrm{kN/m^2}$$

墙面上单宽最小总净波压力

$$\Delta P_{\min} = -\frac{1}{2}\rho g\{H^2 - (H + \zeta_0'_{\max} - h)(H + h_H)\}$$

$$= -\frac{1}{2} \times 1000\ \mathrm{kg} \times 9.81\ \mathrm{ms^{-2}}\{(5\ \mathrm{m})^2$$

$$= -(5\ \text{m} + 0.66\ \text{m} - 1.8\ \text{m})(5\ \text{m} - 0.495\ \text{m})\}$$
$$= -37.33\ \text{kN/m}$$

墙前水质点的最大速度

$$u_{\Pi\max} = 2h\sqrt{\frac{\pi g}{\lambda \sinh 2kH}}$$
$$= 2 \times 1.8\ \text{m}\sqrt{\frac{\pi \times 9.81\ \text{ms}^{-2}}{16\ \text{m} \times \sinh(2 \times 0.393\ \text{m}^{-1} \times 5\ \text{m})}} = 0.99\ \text{m/s}$$

工程中的直墙式建筑物(如直立式防波堤等)常设置抛石明基床,基床上的水深 H_1 小于建筑物前的水深 H,如图 17.24 所示。当 H_1 大于临界水深时,建筑物前仍发生立波。图 17.24(a)为墙前出现最大波峰的情况。图中两根虚线分别为波压强及静水压强分布线,实线为净波压强分布线。由图中的几何关系可求得直墙底部 A 点的最大净波压强为

$$\Delta p_{A\max} = \Delta p_{\max} - (\Delta p_{\max} - \Delta p_H)\frac{H_1}{H} \tag{17.109}$$

式中 $\Delta p_{\max}$为最大净波压强;Δp_H 为水底净波压强。直墙上单宽最大总净波压力为

$$\Delta P_{\max} = \frac{1}{2}(h + \zeta_0'_{\max} + H_1)(\rho g H_1 + \Delta p_{A\max}) - \frac{1}{2}\rho g H_1^2 \tag{17.110}$$

式中 $\zeta_0'_{\max}$为立波最大水面超高。

在核算直墙的整体稳定性时,常需计算作用在墙底面 AB 上的波压力。墙底 A 点净波压强为 $\Delta p_{A\max}$,B 点净波压强为零,A、B 两点之间的净波压强可近似认为按直线分布。当墙前出现最大波峰时,墙底单宽最大总净波压力为

$$\Delta P'_{\max} = \frac{1}{2} b \Delta p_{A\max} \tag{17.111}$$

其作用方向向上。式中 b 为墙的厚度。

图 17.24(b)为墙前出现最大波谷的情况。同样可求得直墙底

部 A 点的最小净波压强为

$$\Delta p_{A_{\min}} = \Delta p_{\min} - (\Delta p_{\min} - \Delta p_H)\frac{H_1 + \zeta_0'_{\max} - h}{H + \zeta_0'_{\max} - h} \tag{17.112}$$

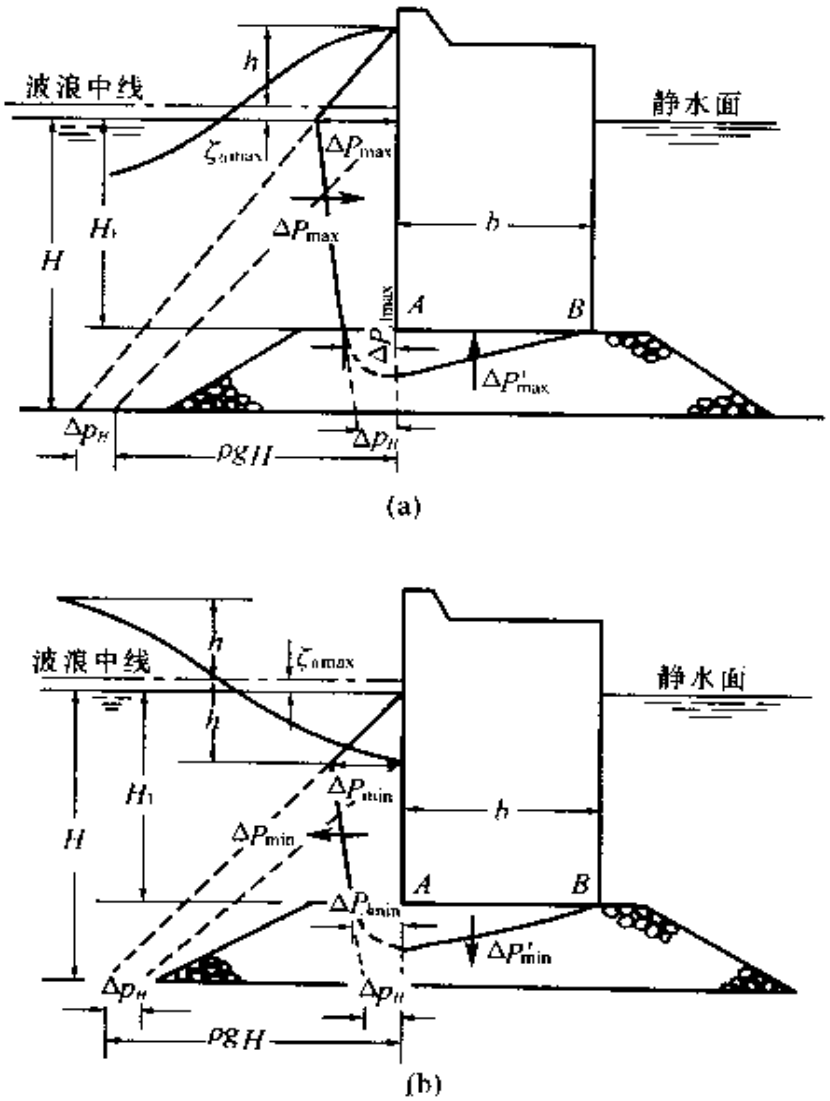


图 17.24

式中 $\Delta p_{\min}$为最小净波压强；Δp_H 为水底净波压强。此时，$\Delta p_{\min}$、Δp_H 和 $\Delta p_{A_{\min}}$均为负值。直墙上单宽最小总净波压力为

$$\Delta P_{\min} = \frac{1}{2}(H_1 - h + \zeta_0'_{\max})(\rho gH_1 - \Delta p_{\min}) - \frac{1}{2}\rho gH_1^2 \tag{17.113}$$

墙底单宽最小总净波压力为

$$\Delta p_{A\min} = \frac{1}{2} b \Delta p_{A\min} \tag{17.114}$$

$\Delta P_{A\min}$和$\Delta P'_{\min}$均为负值。

(八)临界水深

和浅水推进波一样,当水深较小时,浅水立波也会发生波浪破碎现象。由于浅水立波的波形曲线为椭圆余摆线,其波浪破碎时的临界水深可由椭圆余摆线波形的极限情况求得。这一极限情况为水面质点的最大轨迹椭圆的半长轴等于转圆半径,即 $a_0'_{\max} = R$。由于浅水立波波长 λ 等于原波波长,故 $R = \frac{\lambda}{2\pi}$;又 $a_0'_{\max} = 2a_0$,为原波水面轨迹椭圆半长轴的二倍,且有 $a_0 = \frac{h}{2}\coth kH$,于是得

$$h\coth kH_c = \frac{\lambda}{2\pi}$$

则浅水立波的临界水深为

$$H_c = \frac{\lambda}{2\pi}\operatorname{artanh}\left(\frac{2\pi h}{\lambda}\right) = \frac{\lambda}{4\pi}\ln\left(\frac{\lambda + 2\pi h}{\lambda - 2\pi h}\right) \tag{17.115}$$

比较上式与式(17.73)可知浅水立波的临界水深大于浅水推进波的临界水深,即浅水立波比浅水推进波更早破碎。

实际上浅水立波的临界水深还受水底坡度、糙率等许多因素的影响。如果是具有明基床的直墙式建筑物,基床的轮廓、糙率和透水性等都对临界水深发生影响。据实际观测,浅水立波在基床上破碎时的临界水深 $H_c = (1.5 \sim 2.0)h$,h 为原波波高。

(九)对浅水立波理论的检验

首先检验森弗罗浅水立波理论是否满足连续方程。对式(17.88)求出相应偏导数,代入连续方程(17.13),整理后可得

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[1 + k^2(a^2 - b^2)\sin\sigma t\cos 2kx_0\right] = 0$$

可见,只有当

$$k^2(a^2-b^2)=\pi^2\left(\frac{h}{\lambda}\right)^2\left[\frac{\cosh^2 k(H-z_0)}{\sinh^2 kH}-\frac{\sinh^2 k(H-z_0)}{\sinh^2 kH}\right]=0$$

时才能满足连续方程，而上式只有在波陡$\frac{h}{\lambda}\approx 0$时才能近似满足。事实上经常作用在建筑物上波浪的波陡多为$\frac{1}{10}\sim\frac{1}{30}$，因此森氏理论不能满足连续方程，应用这一理论时将会引起一定的误差。

其次检验按森氏理论得到的波压强分布规律是否符合实际。按森氏理论，直墙面上各质点波压强的周期性变化规律与墙前波面的周期性波动规律是一致的。由式(17.102)可知，墙面质点的波压强按正弦规律变化，即墙前出现最大波峰时，$\sin\sigma t=1$，净波压强最大；墙前出现最大波谷时，$\sin\sigma t=-1$，净波压强最小(最大负值)；当波面通过静水面时，$\sin\sigma t=0$，净波压强为零。

但是，许多实测资料表明上述波压强变化规律并不完全符合实际情况。图 17.25 所示为按森氏理论计算的净波压强与实测净波压强的比较，它们分别用虚线和实线表示。图中左边部分为不同深度 z 处的净波压强随时间 t 的变化过程，右边部分为墙前出现最大波峰时沿直墙面上的净波压强分布。从实测的净波压强随时间的变化曲线可知，当墙前波面通过静水面时($t=n\frac{T}{2}$)，净波压强并不为零；当墙前出现最大波峰时，净波压强也不是最大值；尤其当波

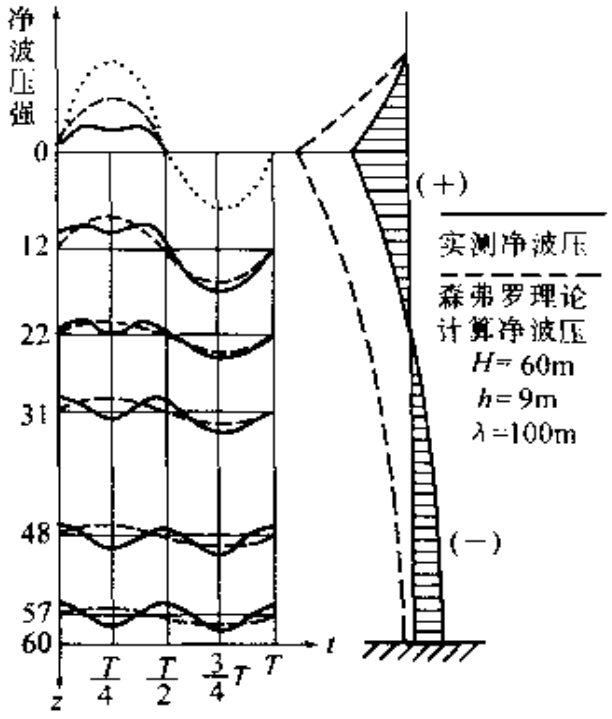


图 17.25

陡$\frac{h}{\lambda}$较大时，在墙前出现波峰的时段里，各点净波压强的时间过程线出现明显的马鞍形，且马鞍形下凹的程度随着水深的增加而增大，到达一定深度处，虽然波峰达最大值，但相应的净波压强已减小至负值。在接近水底处，净波压强随时间的变化频率为波面波动频率的2倍。上述情况表明，波压强的理论值与实测值存在一定差距。

1954年库兹涅佐夫(А.И.Кузнецов)根据立波水质点按抛物线轨迹的运动规律，认为立波的波压强除了受重力影响外，还受质点作曲线运动时的切向和法向惯性力的影响。在综合考虑了重力、切向和法向惯性力的基础上，库氏得到了立波波压强的计算公式，应用库氏公式计算的波压强与实测资料比较符合。由于库氏公式推导和计算较为繁复，不拟详述，可参阅有关文献*。

至于森弗罗的方法虽然存在上述缺点，但因计算简便，且在某些情况下与实际比较符合，因此我国《港口工程技术规范》** 中波压强的计算仍采用森氏的方法，但在某些情况下作了适当的修正。

习　题

17.1　在水深 $H=50$ m 的海面上，推进波的波高 $h=3.2$ m，波长 $\lambda=65$ m。要求：(1)判别属于何种推进波；(2)求水面超高；(3)求波周期及波速；(4)求深度 $z_0=10$ m 处水质点的轨迹圆半径及其运动速度；(5)求一个波长范围内单宽水体的平均总波能；(6)绘出一个波长内的水面波形曲线(每隔$\frac{\lambda}{8}$绘1点)。

17.2　同第一题的条件，当水深改为 $H=15$ m 时，要求：(1)判别属于何种推进波；(2)求水面超高；(3)求波周期及波速；(4)求水面质点轨迹椭圆的半长轴和半短轴；(5)求水面及水底质点的最大速度；(6)求临界水深(理论

* 清华大学水力学教研组．水力学(下册)，人民教育出版社，1961年：350～358页

** 中华人民共和国交通部．港口工程技术规范(第一册)·海港水文，人民交通出版社，1978年。

值);(7)绘出一个波长内的水面波形曲线(每隔$\frac{\lambda}{8}$绘1点)。

17.3 有一深水推进波,波高 $h=1.5$ m,波长 $\lambda=25$ m。当遇到直墙式建筑物时发生深水立波。试求:(1)最大净波压强和单宽最大总净波压力;(2)最小净波压强和单宽最小总净波压力。

17.4 有一直墙式明基床防波堤,基床前水深 $H=8$ m,基床上水深 $H_1=7$ m,直墙厚度 $b=6$ m。原推进波波高 $h=2.5$ m,波长 $\lambda=40$ m,波浪传播方向垂直于防波堤的直墙面。试求:(1)墙前出现最大波峰时墙面和墙底的单宽最大总净波压力;(2)墙前出现最大波谷时墙面和墙底的单宽最小总净波压力。

第十八章　水力模型试验基本原理

第一节　概　述

应用水流运动的基本方程求解水力学问题是一种基本途径，但只有在某些简单的边界条件下才有可能实现。实际工程中的水流现象非常复杂，因此通过物理模型进行水力模型试验是揭示水流运动规律和解决实际工程问题的一种重要手段。

水力模型试验是将原型实物按照相似原理缩制（或放大）为模型，在模型中预演或重演与原型相似的自然现象并进行观测，然后将观测结果再按相似原理引申于原型并作出判断。通过水力模型试验可以对一些未知的水力现象进行系统观测研究，为理论分析提供依据或实验数据；对水工建筑设计成果进行检验，及时改正设计中的问题，为工程建筑物的优化设计、安全可靠及合理运行提供必要的保证。

为了正确设计水力模型，把模型中观测的数据和流动现象换算到原型，并建立水流运动过程中各种物理量之间的关系式，必须掌握水力相似原理及量纲分析法。

第二节　量纲分析法

量纲分析法是根据与研究现象有关的物理量（参数），运用量纲和谐原理，将这些物理量组成无量纲 π 数，然后用这些无量纲 π 数建立各物理量之间的关系式。这一方法是指导模型试验和分析试验成果的重要手段之一。然而，要正确地运用量纲分析法，就必须正确地选用参数，如果参数选用错误，就无法找出正确的关系式。

一、量纲与单位、基本量纲和诱导量纲

在水力学研究中，按性质的不同，将物理量分为密度、粘滞系数、长度、速度、时间、力等各种类别，不同类别的物理量可用不同量纲（或因次）来标志。如长度量纲用 L、质量量纲用 M、时间量纲用 T、力的量纲用 F 等。因此量纲是区别物理量类别的标志。

单位是量度各种物理量数值大小的标准。由于取用的标准不同，被量度的物理量将具有不同的量值。如直径为 1 m 的管道，可以 100 cm 或 1000 mm 表示，因而被量度的直径具有不同的量值。

量纲可分为基本量纲和诱导量纲两类。

基本量纲必须具有独立性，即一个基本量纲不能从其他基本量纲导出。在国际单位制中，对于力学问题，采用的三个基本量纲分别为长度、时间和质量，即 L、T、M 制。任何一个力学量的量纲都可以由长度、时间和质量的量纲导出。

用基本量纲通过各种基本自然规律导出的其他物理量的量纲称为诱导量纲。

力学中任何一个其他物理量的量纲，一般均可用三个基本量纲的指数乘积形式来表示。如 x 为某一物理量，其量纲可用下式表示：

$$[x] = L^{\alpha}T^{\beta}M^{\gamma} \tag{18.1}$$

该量纲公式中 x 的性质可由量纲指数 α、β、γ 来反映。

如 $\alpha \neq 0, \beta = 0, \gamma = 0$，为一几何学量；

如 $\alpha \neq 0, \beta \neq 0, \gamma = 0$，为一运动学量；

如 $\alpha \neq 0, \beta \neq 0, \gamma \neq 0$，为一动力学量。

例如面积 A 的量纲为长度量纲的平方，$[A] = L^2T^0M^0 = L^2$，流速 v 的量纲为 $[v] = L^1T^{-1}M^0 = L/T$，加速度 a 的量纲为 $[a] = L^1T^{-2}M^0 = L/T^2$。由牛顿定律可知 $F = ma$，则力的量纲为 $[F] = MLT^{-2}$。

以上讨论的是以 L、T、M 为基本量纲，常采用的单位为 m、s、

kg,称为国际单位制(SI 制)。水力学中常见物理量的量纲和单位见表 18.1。

表 18.1　　水力学中常见物理量的量纲和单位

物理量		量纲	单位	物理量		量纲	单位
几何学的量	长度 l	L	m	动力学的量	质量 m	M	kg
	面积 A	L^2	m^2		力 F	ML/T^2	N
	体积 V	L^3	m^3		密度 ρ	M/L^3	kg/m^3
	水力坡度 J、底坡 i	L^0	m^0		动力粘滞系数 μ	M/LT	$N\cdot s/m^2$
	惯性矩 I	L^4	m^4		压强 p	M/LT^2	N/m^2
运动学的量	时间 t	T	s		切应力 τ	M/LT^2	N/m^2
	流速 v	L/T	m/s		体积弹性系数 E	M/LT^2	N/m^2
	重力加速度 g	L/T^2	m/s^2		表面张力系数 σ	M/T^2	N/m
	单宽流量 q	L^2/T	m^2/s		功、能 W	ML^2/T^2	J(焦耳)
	流函数 ψ	L^2/T	m^2/s		功率 N	ML^2/T^3	N.m/s
	势函数 φ	L^2/T	m^2/s		动量 K	ML/T	kg.m/s
	旋转角速度 ω	$1/T$	1/s				
	运动粘滞系数 ν	L^2/T	m^2/s				

二、无量纲数

量纲表达式(18.1)中包括的各基本量纲的指数为零的量称为无量纲数或纯数,即当 $\alpha=\beta=\gamma=0$ 时,式(18.1)成为

$$[x]=L^0T^0M^0=1 \tag{18.2}$$

称 x 为无量纲数。

无量纲数可以是同种物理量的比值,如水面坡降 J 是高差 Δh 对长度 l 的比值,$J=\Delta h/l$,J 的量纲为 1,即为无量纲数。此外,如相对粗糙度 Δ/d、应变 $\Delta l/l$ 等均为无量纲数,称为 π 数。

无量纲数也可以由几个有量纲量通过乘除组合而成,即经组

合后各个基本量纲的指数为零。如雷诺数 $Re = vd/\nu$ 及弗劳德数 $Fr = v/\sqrt{gh}$ 等均为无量纲数。

在原型与模型两种规模大小不同的流动中，无量纲数相同。在模型试验中，用某个无量纲数作为判据（如 Re 或 Fr 等），就可以模拟与原型流动相似的流态。

三、量纲和谐原理

凡是正确反映客观规律的物理方程，其各项的量纲都必须一致，称为量纲和谐原理。如能量方程中 z、$\frac{p}{\rho g}$、$\frac{\alpha v^2}{2g}$、h_w 项均具有长度量纲 L，可见它是符合量纲和谐原理的。量纲和谐原理可用来检验理论或经验公式的合理性。

但要说明，一些单纯依据实验、观测资料建立的经验公式，其量纲有时是不和谐的。如谢才公式 $v = C\sqrt{RJ}$，该经验公式规定要用m、s 为单位，则式中 C 为一个具有量纲 $L^{1/2}/T$ 的系数，单位为 $m^{1/2}/s$。曼宁提出 C 的经验公式为 $C = \frac{1}{n}R^{1/6}$，式中 n 为糙率，若根据量纲和谐原理，n 的量纲应为 $T/L^{1/3}$，但一般文献和实用中糙率 n 是作为无量纲数处理的，所以曼宁公式的量纲是不和谐的。这也说明当人们对客观事物认识尚不够全面、充分时，只能用不完善的经验关系式来表示某一物理过程的规律性，但它们对生产实际仍有一定的实用价值。

四、量纲分析法

量纲分析法就是应用量纲和谐原理探求各物理量之间关系的方法。通常采用下列二种方法：

（一）瑞利法

瑞利（L. Rayleigh）法适用于影响因素（自变量）间的关系为单项指数形式，即

$$y = f(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n) = 0 \qquad (18.3)$$

式中 $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ 为自变量，y 为函数。现用下列例题来说明瑞利法。

例 18.1 设图 18.1 所示为理想液体孔口出流，试用瑞利法导出以液体密度 ρ、孔口直径 d 及压强差 Δp（$\Delta p = \rho g h$，h 为孔口水头）表示的孔口流量 Q 的表达式。

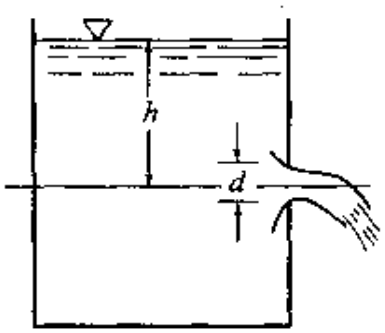


图 18.1

解：按瑞利法，写出 Q 的函数形式为

$$Q = f(\rho, d, \Delta p)$$

将上式写成下列指数形式，即

$$Q = K\rho^a d^b \Delta p^c$$

其量纲关系式为

$$[L^3/T] = [M/L^3]^a [L]^b [M/(LT^2)]^c$$

根据量纲和谐原理，得

$$\left.\begin{aligned} &M: a + c = 0 \\ &L: -3a + b - c = 3 \\ &T: -2c = -1 \end{aligned}\right\}$$

解得 $a = -\frac{1}{2}$，$b = 2$，$c = \frac{1}{2}$，代入原式，得

$$Q = K\rho^{-\frac{1}{2}} d^2 \Delta p^{\frac{1}{2}} = Kd^2 \sqrt{\frac{\Delta p}{\rho}}$$

式中 $\Delta p = \rho g h$，若令 $K = \sqrt{2} \cdot \frac{\pi}{4}$，则

$$Q = \frac{\pi}{4} d^2 \sqrt{2gh} = A\sqrt{2gh}$$

式中 A 为孔口面积。

（二）π 定理

π 定理是一种具有普遍性的量纲分析方法，它是 1915 年由布金汉（E. Buckingham）提出来的。

π 定理可以表述如下：任何一个物理过程，如包含有 n 个物理量，涉及 m 个基本量纲，则这个物理过程可以用 $n - m$ 个无量纲 π 数所表达的关系式来描述，即

$$F(\pi_1,\pi_2,\cdots,\pi_{n-m})=0 \tag{18.4}$$

π定理的数学证明此处从略，可详见有关专著。应用π定理的步骤如下：

1. 确定影响所研究问题的各个物理量。例如，表征水的物理特性的有密度、重力加速度、粘滞系数、表面张力等；表征流动边界影响的如建筑物几何尺寸、边界粗糙凸出高度等；表征水流运动要素的有水头、单宽流量、流速、压强等。影响因素列举是否全面和正确，将直接影响分析结果。所列举的物理量中，可以包括变量和常量。

2. 在 n 个物理量中选取 m 个基本物理量，对于力学问题，取 $m=3$，即在几何学量、运动学量及动力学量中各选一个组成，这样做的目的是要求三个基本量在量纲上是相互独立的，即它们不能组合成一个无量纲量。

设所选择的基本物理量为 x_1,x_2,x_3，其量纲表达式为

$$\left.\begin{aligned}[x_1]&=\mathrm{L}^{\alpha_1}\mathrm{T}^{\beta_1}\mathrm{M}^{\gamma_1}\\ [x_2]&=\mathrm{L}^{\alpha_2}\mathrm{T}^{\beta_2}\mathrm{M}^{\gamma_2}\\ [x_3]&=\mathrm{L}^{\alpha_3}\mathrm{T}^{\beta_3}\mathrm{M}^{\gamma_3}\end{aligned}\right\}$$

x_1、x_2、x_3 在量纲上是独立的，即不能组合成无量纲数，这就要求它们的指数乘积不能为零，也就是要求上式中的指数行列式不等于零，即

$$\Delta=\begin{vmatrix}\alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1\\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2\\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3\end{vmatrix}\neq 0 \tag{18.5}$$

3. 写出 $n-3$ 个无量纲π数，它们分别由 $n-3$ 个以外的物理量 $x_4,x_5,x_6,\cdots,x_n$ 与由3个基本量组成的指数形式的乘积 $x_1^{a_i}$，$x_2^{b_i}$，$x_3^{c_i}$ 的比值组合而成，式中 $i=1,2,3,\cdots,n-3$，即

$$\pi_1=\frac{x_4}{x_1^{a_1},x_2^{b_1},x_3^{c_1}}$$

$$\pi_2 = \frac{x_5}{x_1^{a_2}, x_2^{b_2}, x_3^{c_2}}$$

……

$$\pi_{n-3} = \frac{x_n}{x_1^{a_{n-3}}, x_2^{b_{n-3}}, x_3^{c_{n-3}}}$$

式中 a_i, b_i, c_i 为待定指数。

4. $\pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_{n-3}$是无量纲数，即$[\pi] = L^0T^0M^0$，根据量纲和谐原理可求出指数 a_i, b_i, c_i。

5. 最后可写出描述物理过程的关系式为

$$F(\pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_{n-3}) = 0$$

下面通过实例说明 π 定理的应用。

例 18.2 用 π 定理推求水平等直径有压管内压强差 Δp 的表达式。已知影响 Δp 的物理量有管长 l、管径 d、管壁绝对粗糙度 Δ、流速 v、液体密度 ρ、动力粘滞系数 μ、重力加速度 g。

解： 列出上述影响因素的函数关系式为

$$F(d, v, \rho, l, \mu, \Delta, \Delta p) = 0$$

可以看出函数式中变量个数 $n = 7$。

选取三个基本物理量，它们分别是几何学量 d、运动学量 v 及动力学量 ρ，其量纲分别为

$$\left.\begin{aligned} [d] &= L^{\alpha_1}T^{\beta_1}M^{\gamma_1} = L^1T^0M^0 \\ [v] &= L^{\alpha_2}T^{\beta_2}M^{\gamma_2} = L^1T^{-1}M^0 \\ [\rho] &= L^{\alpha_3}T^{\beta_3}M^{\gamma_3} = L^{-3}T^0M^1 \end{aligned}\right\}$$

检查 d、v、ρ 在量纲上的独立性

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

说明以上三个基本物理量的量纲是互相独立的。

写出 $n - 3 = 7 - 3$ 个无量纲 π 数：

$$\pi_1 = \frac{l}{d^{a_1}v^{b_1}\rho^{c_1}}$$

$$\pi_2 = \frac{\mu}{d^{a_2} v^{b_2} \rho^{c_2}}$$

$$\pi_3 = \frac{\Delta}{d^{a_3} v^{b_3} \rho^{c_3}}$$

$$\pi_4 = \frac{\Delta p}{d^{a_4} v^{b_4} \rho^{c_4}}$$

根据量纲和谐原理，各 π 数中的指数分别确定如下。以 π_1 为例：

$$[\mathrm{L}] = [\mathrm{L}]^{a_1}[\mathrm{LT}^{-1}]^{b_1}[\mathrm{ML}^{-3}]^{c_1}$$

即

$$\mathrm{L}:1 = a_1 + b_1 - 3c_1$$

$$\mathrm{T}:0 = -b_1$$

$$\mathrm{M}:0 = c_1$$

解得 $a_1 = 1$、$b_1 = 0$、$c_1 = 0$，则可写成

$$\pi_1 = \frac{l}{d}$$

同理可得 $\pi_2 = \frac{\mu}{dv\rho}$，$\pi_3 = \frac{\Delta}{d}$，$\pi_4 = \frac{\Delta p}{v^2\rho}$

则 $$f(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4) = f\left(\frac{l}{d}, \frac{\mu}{dv\rho}, \frac{\Delta}{d}, \frac{\Delta p}{v^2\rho}\right) = 0$$

上式中的 π 数可根据需要取其倒数，而不会改变它的无量纲性质，可写成

$$f_1\left(\frac{l}{d}, \frac{dv\rho}{\mu}, \frac{\Delta}{d}, \frac{\Delta p}{v^2\rho}\right) = 0$$

求解压差 Δp，得

$$\frac{\Delta p}{v^2\rho} = f_2\left(\frac{l}{d}, \frac{dv\rho}{\mu}, \frac{\Delta}{d}\right)$$

以 $Re = \frac{dv\rho}{\mu} = \frac{vd}{\nu}$，代入，并写为

$$\frac{\Delta p}{\rho g} = f_3(Re, \frac{\Delta}{d}) \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g}$$

式中 $h_f=\frac{\Delta p}{\rho g}$，令 $\lambda=f_3(Re,\frac{\Delta}{d})$，最后可得沿程水头损失公式为

$$h_f=\lambda\frac{l}{d}\frac{v^2}{2g} \tag{18.6}$$

上式是沿程损失的一般表达式，即第四章中的式(4.29)。式中 λ 称为沿程水头损失系数，可由试验进一步求得 λ 随雷诺数 Re 及相对粗糙度 $\frac{\Delta}{d}$ 的变化关系，已在第四章中阐明。

量纲分析法不仅可以利用量纲和谐原理求出各物理量之间的基本关系式，而且可进一步找出研究该问题的途径；此外它还可以使经验公式具有理论上(量纲和谐)的正确形式。

第三节　水力相似基本原理

水力相似原理是水力模型试验的理论依据，也是对液流现象进行理论分析的一个重要手段。在水力学研究中，从某些水流的内部机理直至水工建筑物、水力机械等方面的设计、施工和运行中的水流问题，都广泛运用水力模型试验的知识。

根据什么原则设计和制作水力模型？模型中出现的水力现象能否反映实际工程中的水流现象，即两者是否相似？这是本节所要探讨的问题。

一、比尺、基本比尺、导出比尺

比尺是指原型和模型对应的物理量之比，比尺的数目与物理量的个数相同。所有的物理量都可用基本物理量的指数乘积来表示。基本比尺是互相独立的基本物理量的原型与模型之比，通常取长度、时间和质量(或力)；导出比尺是由基本比尺以指数形式的乘积组成的比尺。

二、几何相似、运动相似和动力相似

如果原型和模型两个流场的相应点上，所有表征流动状况的

相应物理量存在一定的比例关系，则这两种流动是力学相似的。要满足力学相似，必须满足几何相似、运动相似和动力相似。

现对有关符号予以说明。凡涉及原型中的物理量，以下标“p”表示；模型中的物理量，以下标“m”表示。物理量的比尺以“λ”表示，并以下标表示该物理量之类别。

（一）几何相似

几何相似是指原型与模型两个流场中，所有相应线段的长度都维持一定的比例关系，即长度比尺为

$$\lambda_l = \frac{l_p}{l_m} \tag{18.7}$$

几何相似的必然结果是原型、模型相应部位的面积 A、体积 V 也维持一定的比例关系，面积比尺为

$$\lambda_A = \frac{A_p}{A_m} = \lambda_l^2 \tag{18.8}$$

体积比尺为

$$\lambda_V = \frac{V_p}{V_m} = \lambda_l^3 \tag{18.9}$$

（二）运动相似

运动相似是指原型与模型两个流场相应点的速度 v 和加速度 a 的大小各维持一定的比例关系，且方向相同。即

速度比尺为

$$\lambda_v = \frac{v_p}{v_m} = \frac{l_p/t_p}{l_m/t_m} = \frac{\lambda_l}{\lambda_t} \tag{18.10}$$

加速度比尺为

$$\lambda_a = \frac{a_p}{a_m} = \frac{v_p/t_p}{v_m/t_m} = \frac{\lambda_v}{\lambda_t} = \frac{\lambda_l}{\lambda_t^2} \tag{18.11}$$

式(18.10)、(18.11)中，$\lambda_t = \frac{t_p}{t_m}$ 为时间比尺，它与 λ_l 同为基本比尺；λ_v、λ_a 为导出比尺。

（三）动力相似

动力相似是指作用于原型与模型两个流场相应点上的各种作用力的大小均维持一定的比例关系，且方向相同。如以 F_p、F_m 分别表示原型和模型水流中相应点所受的同类性质的力，则动力相似要求

$$F_p / F_m = \lambda_F \tag{18.12}$$

以上三个相似条件是模型和原型保持完全相似的主要条件，它们互相联系，互为条件。几何相似是运动相似和动力相似的前提和依据；动力相似是决定水流运动相似的主导因素；运动相似是几何相似和动力相似的具体表现和结果，它们是一个统一整体，缺一不可。

三、牛顿相似定律

模型与原型的流动都必须服从同一运动规律，并为同一物理方程所描述，这样才能做到几何、运动和动力的完全相似。由于与液体不同的物理性质有关的重力、粘滞力、弹性力、表面张力等都是企图改变运动状态的力，而由液体惯性所引起的惯性力是企图维持液体原有运动状态的力，因此各种力之间的对比关系应以惯性力和其他各力之间的比值来表示。

为了正确地进行模型设计，需对液流的动力相似作进一步探讨，找出动力相似的具体表达式。

任何液体运动，不论是原型还是模型，都必须遵循牛顿第二定律，即

$$F = ma = \rho l^3 \frac{l}{t^2} = \rho l^2 u^2$$

式中 u 为点流速，如研究的是某一过水断面，可用断面平均流速 v 代替 u。

动力相似要求

$$\lambda_F = \frac{F_p}{F_m} = \frac{\rho_p l_p^2 v_p^2}{\rho_m l_m^2 v_m^2} = \lambda_\rho \lambda_l^2 \lambda_v^2 \tag{18.13}$$

上式可以写成

$$\frac{F_p}{\rho_p l_p^2 v_p^2} = \frac{F_m}{\rho_m l_m^2 v_m^2} \tag{18.14}$$

$\frac{F}{\rho l^2 v^2}$是无量纲数，称为牛顿数，以 Ne 表示，即

$$Ne = \frac{F}{\rho l^2 v^2} \tag{18.15}$$

牛顿数的物理意义是作用于水流的外力与惯性力之比。式中 ρ 为密度；l 为特征长度，如水深、管径、水力半径等；v 为流速。于是式(18.14)可写为

$$(Ne)p = (Ne)m \tag{18.16}$$

式(18.16)表明：两个动力相似的水流，它们的牛顿数必相等，称为牛顿相似定律。

四、相似准则

在自然界，作用于水流的力是多种多样的，例如重力、粘滞力、压力、表面张力、弹性力等，这些力互不相同，各自遵循自己的规律，并用不同形式的物理公式来表达。因此，要使模型和原型水流运动相似，这些力除了满足牛顿数 Ne 相等的条件外，还必须满足由其自身性质决定的规律。然而要考虑所有不同性质的力的相似，就要同时满足许多特殊规律，这是非常困难的，往往也无法做到，因此对于某种具体水流来说，虽然液流中同时作用着不同性质的力，但是它们对水流运动状态的影响并不相同，即总有一种或两种力居于支配地位，并决定水流运动状态。在水力模型试验中，往往使其中起主导作用的力满足相似条件，这样，就能基本上反映水流运动状态的相似。实践证明，这样处理能满足实际问题所要求的精度。这种只满足某一种力作用下的动力相似条件称为相似准则。

(一)重力相似准则

重力是液流现象中常遇到的一种作用力，如明渠水流、堰流及

闸孔出流等都是重力起主要作用的流动。

重力可表示为 $G=\rho gV$。重力的比尺为

$$\lambda_G=\frac{G_p}{G_m}=\frac{\rho_p g_p l_p^3}{\rho_m g_m l_m^3}=\lambda_\rho\lambda_g\lambda_l^3$$

当重力起主要作用时，可以认为 $F=G$，$\lambda_F=\lambda_G$，考虑到式(18.13)，可得

$$\frac{\rho_p g_p l_p^3}{\rho_p l_p^2 v_p^2}=\frac{\rho_m g_m l_m^3}{\rho_m l_m^2 v_m^2}$$

整理，得

$$\frac{v_p}{\sqrt{g_p l_p}}=\frac{v_m}{\sqrt{g_m l_m}} \tag{18.17}$$

$\frac{v}{\sqrt{gl}}$为无量纲弗劳德数 Fr，即

$$Fr_p=Fr_m \tag{18.18}$$

上式表明，两个液流在重力作用下的动力相似条件是它们的弗劳德数相等，称为重力相似准则或弗劳德相似准则。

(二)阻力相似准则

阻力可表示为 $T=\tau\chi l$

式中 τ 为边界切应力，χ 为湿周，l 为流程。对于均匀流，$\tau=\rho gRJ$，且水力坡度 $J=h_f/l=\frac{\lambda}{4R}\frac{v^2}{2g}$。代入上式，整理得

$$T=\frac{1}{8}\rho\lambda l\chi v^2$$

式中 λ 为沿程水头损失系数。阻力比尺为

$$\lambda_T=\frac{T_p}{T_m}=\frac{\rho_p\lambda_p l_p^2 v_p^2}{\rho_m\lambda_m l_m^2 v_m^2}=\lambda_\rho\lambda_\lambda\lambda_l^2\lambda_v^2$$

当阻力起主要作用时，可以认为 $F=T$，$\lambda_F=\lambda_T$，考虑到式(18.13)，可得

$$\frac{\rho_p\lambda_p l_p^2 v_p^2}{\rho_p l_p^2 v_p^2}=\frac{\rho_m\lambda_m l_m^2 v_m^2}{\rho_m l_m^2 v_m^2}$$

即
$$\lambda_p = \lambda_m \tag{18.19}$$
$$\lambda_\lambda = 1 \tag{18.20}$$
式(18.19)或(18.20)为阻力相似的一般准则。

考虑到 λ 与谢才系数 C 的关系：$\lambda = \frac{8g}{C^2}$，则沿程水头损失系数比尺为
$$\lambda_\lambda = \frac{\lambda_g}{\lambda_C^2} = \frac{1}{\lambda_C^2}$$
代入式(18.20)，得
$$\lambda_C = 1 \tag{18.21}$$
即
$$C_p = C_m \tag{18.22}$$
式(18.21)或(18.22)为阻力相似一般准则的另一表达式。式(18.19)及(18.22)表明：两个液流在阻力作用下的动力相似条件是它们的沿程水头损失系数或谢才系数相等。这一准则对层流和紊流均适用。

下面分别导出适用于层流和紊流粗糙区的阻力相似准则和相似条件。

1. 层流

对于层流，沿程水头损失系数 $\lambda = \frac{64}{Re}$，则
$$\lambda_\lambda = \frac{1}{\lambda_{Re}}$$
代入式(18.20)，可得
$$\lambda_{Re} = 1 \tag{18.23}$$
即
$$Re_p = Re_m \tag{18.24}$$
上式表明两个液流在粘滞力(层流时的阻力)作用下的动力相似条件是它们的雷诺数相等，称为粘滞力相似准则或雷诺相似准则。

2. 紊流粗糙区

对于紊流粗糙区，引用曼宁公式：$C = \frac{1}{n}R^{1/6}$，则

$$\lambda_C = \frac{\lambda_l^{1/6}}{\lambda_n}$$

代入式(18.21),可得

$$\lambda_n = \lambda_l^{1/6} \tag{18.25}$$

上式为紊流粗糙区的阻力相似条件。它表明:只要模型的糙率比尺 λ_n 满足式(18.25)的关系,就能满足阻力作用下的动力相似。因此,紊流粗糙区又称自动模型区。

(三)表面张力相似准则

表面张力用 σl 表征,σ 为表面张力系数,按与以上相同的方法由式(18.13),可得

$$\frac{\sigma_p l_p}{\rho_p l_p^2 v_p^2} = \frac{\sigma_m l_m}{\rho_m l_m^2 v_m^2}$$

简化后整理得

$$\frac{\sigma_p/\rho_p}{v_p^2 l_p} = \frac{\sigma_m/\rho_m}{v_m^2 l_m} \tag{18.26}$$

令 $We = \frac{v^2 l}{\sigma/\rho}$,它是一个无量纲数,称为韦伯(Weber)数,表征水流中表面张力与惯性力之比,于是式(18.26)可写成

$$We_p = We_m \tag{18.27}$$

式(18.27)为表面张力相似准则,或称为韦伯相似准则。它表明:两个液流在表面张力作用下的力学相似条件是它们的韦伯数相等。这个准则只有在流动规模甚小,表面张力的作用相对显著时才需应用。

(四)弹性力相似准则

弹性力用 El^2 表示,式中 E 为体积弹性系数,按式(18.13)可以写成

$$\frac{E_p l_p^2}{\rho_p l_p^2 v_p^2} = \frac{E_m l_m^2}{\rho_m l_m^2 v_m^2}$$

简化后整理得

$$\frac{E_p/\rho_p}{v_p^2} = \frac{E_m/\rho_m}{v_m^2} \tag{18.28}$$

令 $Ca = \frac{v^2}{E/\rho}$，它也是一个无量纲数，称为柯西(Cauchy)数，表征弹性力与惯性力之比，则式(18.28)可写成

$$Ca_p = Ca_m \tag{18.29}$$

式(18.29)为弹性力相似准则，或称柯西相似准则。它表明：两个液流在弹性力作用下的力学相似条件是它们的柯西数相等。它适用于管路中发生水击时的流动。

(五)惯性力相似准则

在非恒定一元流动中，加速度 a 可表示为

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial s}$$

式中加速度由定位加速度$\frac{\partial v}{\partial t}$和变位加速度 $v\frac{\partial v}{\partial s}$两部分组成，变位加速度的惯性作用与定位加速度的惯性作用之比可写成

$$\frac{v \cdot v/l}{v/t} = \frac{vt}{l} \tag{18.30}$$

无量纲数$\frac{l}{vt} = Sr$，称为斯特劳哈尔(Strouhal)数。如果要求原型、模型的非恒定流动相似，则要求斯特劳哈尔数相等，即

$$Sr_p = Sr_m \tag{18.31}$$

式(18.31)是惯性力相似准则，它是变位加速度的惯性作用与定位加速度的惯性作用之比。因为它是控制非恒定流时间的准数，故又称为时间相似准则。

(六)压力相似准则

一般水流运动中所要了解的是压差 Δp，则按式(18.15)可写成

$$\frac{\Delta p_p A_p}{\rho_p l_p^2 v_p^2} = \frac{\Delta p_m A_m}{\rho_m l_m^2 v_m^2}$$

整理得

$$\frac{\Delta p_p}{\rho_p v_p^2} = \frac{\Delta p_m}{\rho_m v_m^2} \tag{18.32}$$

令$\frac{\Delta p}{\rho v^2} = Eu$，它也是一个无量纲数，称为欧拉(Euler)数，它表示水流中压差与惯性力的对比关系。当要求原型与模型中压差相似，则必须

$$Eu_p = Eu_m \tag{18.33}$$

上式为压力相似准则。

以上所述的相似准则也可从纳维-斯托克斯方程导出，详见有关专著。

第四节　相似原理的应用及水力模型设计

一、模型比尺的换算

已知不同主要作用力的相似准则，就可进行模型中各物理量比尺的计算。

(一)重力相似准则要求的物理量比尺

将式(18.17)用比尺形式表示，可写为

$$\frac{\lambda_v}{\lambda_g^{1/2}\lambda_l^{1/2}} = 1 \tag{18.34}$$

因原型与模型均在地球上，重力加速度 g 在各地差异很小，故 $\lambda_g = 1$。代入式(18.34)可得流速比尺

$$\lambda_v = \lambda_l^{1/2} \tag{18.35}$$

流量比尺

$$\lambda_Q = \frac{Q_p}{Q_m} = \frac{v_p A_p}{v_m A_m} = \lambda_v \lambda_l^2 = \lambda_l^{2.5} \tag{18.36}$$

由以上两式可知，在长度较原型小 λ_l 倍的模型中，为满足重力相似准则，则模型流速较原型流速小 $\lambda_l^{1/2}$ 倍；模型流量较原型流量小 $\lambda_l^{2.5}$ 倍。重力相似准则要求的其他物理量比尺见表 18.2。

(二)阻力相似准则要求的物理量比尺

1. 粘滞力相似

因雷诺数 $Re = \frac{v\,l}{\nu}$，则 $\lambda_{Re} = \frac{\lambda_v \lambda_l}{\lambda_\nu}$。代入式(18.23)得

$$\frac{\lambda_v \lambda_l}{\lambda_\nu} = 1$$

当原型与模型均为同一种液体，且液体温度相近时，$\nu_p = \nu_m$，即 $\lambda_\nu = 1$。代入上式可得，流速比尺

$$\lambda_v = \frac{1}{\lambda_l} \tag{18.37}$$

流量比尺

$$\lambda_Q = \frac{v_p A_p}{v_m A_m} = \frac{1}{\lambda_l} \cdot \lambda_l^2 = \lambda_l \tag{18.38}$$

式(18.37)说明，为了使流动中粘滞力作用相似，就要求流速比尺是长度比尺的倒数。如果长度比尺 $\lambda_l = 10$，则流速比尺 $\lambda_v = \frac{1}{10}$，即模型流速要比原型流速大 10 倍。粘滞力相似准则要求的其他物理量比尺见表 18.2。

当液体在几种力共同作用下运动时，如层流运动，一般情况下表面张力及弹性力可以忽略不计，影响水流运动的主要作用力为重力和粘滞力，即

按重力相似准则　　$\lambda_v = \lambda_l^{1/2}$

按粘滞力相似准则　　$\lambda_v = \lambda_\nu / \lambda_l$

如兼顾二者，则要求　　$\lambda_\nu = \lambda_l^{3/2}$ (18.39)

上式表明，同时满足重力相似和粘滞力相似的模型应该采用与原型不同的液体进行试验，其粘滞系数应比原型小 $\lambda_l^{3/2}$ 倍。当原型液体为石油，$\lambda_l = 4$，则模型中必须采用 $T = 20℃$、浓度为 59% 的甘油溶液，模型试验难以实现。当模型与原型采用同一液体进行试验，如均为水，即 $\lambda_\nu = 1$，则 $\lambda_l = 1$，即模型与原型一样大，这就失去模型试验的意义了。因此，重力相似和粘滞力相似难以同时

满足。

2. 紊动阻力相似

在原型、模型水流中要满足紊动阻力相似，则必须满足式(18.25)的要求，即

$$\lambda_n = \lambda_l^{1/6}$$

如某工程导流底孔，原型材料为混凝土浇筑，壁面糙率 $n_p = 0.014$。现按长度比尺 $\lambda_l = 30$ 制作断面模型，为达到紊动阻力相似，则模型糙率应为

$$n_m = \frac{n_p}{\lambda_l^{1/6}} = \frac{0.014}{30^{1/6}} = 0.0079$$

采用有机玻璃制作，基本能满足要求。

表面张力相似适用于小型沟渠中表面微波及土壤中毛管现象；弹性力相似除用于水击问题外，更多地用于空气动力学问题；惯性力相似用于非恒定流；压力相似是其他几种力相似的必然结果。对这几个相似比尺关系不再详述，必要时可由式(18.26)、(18.28)、(18.30)及(18.32)推求。

表 18.2　　各物理量相似比尺关系

名　称	符号	相似准则		说　明
		重　力	粘滞力	
长　度	λ_l	λ_l	λ_l	要求： $\lambda_g = 1$； $\lambda_\rho = 1$ $\lambda_\nu = 1$
流　速	λ_v	$\lambda_l^{1/2}$	λ_l^{-1}	
流　量	λ_Q	$\lambda_l^{2.5}$	λ_l	
时　间	λ_t	$\lambda_l^{1/2}$	λ_l^2	
力	λ_F	λ_l^3	1	
压强、切应力	λ_p、λ_τ	λ_l	λ_l^{-2}	
加速度	λ_a	1	λ_l^{-3}	
功　能	λ_E	λ_l^4	λ_l	
功　率	λ_N	$\lambda_l^{3.5}$	λ_l^{-1}	

二、相似原理的应用及限制条件

进行水力模型设计时，首先必须根据原型液体运动的特性，确定控制流动的主要作用力，再根据对应的相似准则，算出各物理量的模型比尺。但是由于水流运动的复杂性，即使相似准数保持不变，模型中的物理现象也只在一定范围内才与原型相似，这是因为模型缩小（有时扩大）了若干倍后，数量变化越出了一定的界限，性质上就起变化，如高速掺气水流模型及在常规大气压情况下的负压模拟问题。因此模型设计中除保持相似准数相等以外，模型中各物理量的大小还应保持在一定范围以内而不超过某些界限，才不致产生过分歪曲现象而得出错误结果。对于水流运动，埃斯奈尔（Eisner）等人提出以下几个限制条件：

（一）共同作用力的限制条件

当流体在几种力共同作用下运动时，从理论上讲必须同时考虑几个相似准则，但在一般情况下往往只考虑重力和阻力相似。在水力模型试验中的液体一般都是水，因此无法使模型设计同时遵循弗劳德准则和雷诺准则，只能考虑一种主要的作用力，同时估计其他作用力的影响，使原型与模型近似地相似。由于水利工程建筑物中水流运动大多是重力起主要作用，所以一般按弗劳德准则设计模型，但试验中必须在粘滞性可忽略的范围内进行，或估算由于越出范围而引起的误差，对试验成果予以校正。

（二）流态的限制条件

1. 层流与紊流的界限

层流运动与紊流运动有质的差别。由于水力模型试验中研究的多是紊流，因此模型水流中相当最小水深（或水力半径）和最小流速时的雷诺数应大于上临界雷诺数 Re_c'。一般在圆管中，上临界雷诺数取 13350；粗糙表面矩形明渠中上临界雷诺数 Re_c' 约为 3000～4000。

2. 缓流与急流的界限

对于明渠水流模型，应保证其水流状态（缓流或急流）与原型相同。如按重力相似准则设计明渠水流模型，对应点上模型的弗劳德数应与原型的相等，而水流状态也应相同。然而有时由于各种外界影响因素，如扰动程度、边界粗糙程度等都无法完全相似，这样就使水流状态有所变化。

在设计明渠均匀流模型时，常以实际底坡 i 与临界临坡 i_c 相比以判别流态。明渠临界底坡 $i_c=\frac{g\chi_c}{\alpha C_c^2 B_c}$，式中 C_c 为临界水深时的谢才系数，则模型底坡 i_m 为

均匀缓流模型 $$i_m < \frac{g\chi_c}{\alpha C_c^2 B_c} \tag{18.40}$$

均匀急流模型 $$i_m > \frac{g\chi_c}{\alpha C_c^2 B_c} \tag{18.41}$$

底坡 i 为无量纲数，当 $\lambda_i=\frac{i_p}{i_m}=1$ 时，模型底坡与原型相同。如考虑外界影响因素，为保证水流状态相似，往往对模型底坡作一定的调整，即如需保证为缓流状态，则底坡设计成比计算临界值小10%；如需保证为急流，则底坡要较临界值大10%。

（三）模型试验中几个应注意的问题

1. 模型中糙率制作的限制条件

边壁表面有凹有凸，如果要求模型与原型严格地几何相似，则应把边壁上凹凸大小、位置和形态如实模拟，但这是不可能的，即使这些凹凸被准确地缩小若干倍后，它们对水流摩阻的影响也不会与原型相似。因此模型的糙率不能用使壁面的粗细起伏与原型几何相似的办法来获得，而只能使模型边界对水流的阻滞影响相似，形成水头损失相似，在明渠中就是使模型水面坡降与原型相等，即使 $J_m=J_p$，或 $\lambda_m=\lambda_p$。实际试验中先按经验试行加糙，再按不同流量放水校核水面坡降。

2. 真空与空蚀的限制条件

一般模型试验是在常规的一个大气压下进行测试的，有时如将模型中测得的负压按比尺换算为原型值，其压强水头甚至超过 -10 m，这是不合理的，而且原型中也不可能出现这种现象，因而在试验中对真空、空蚀问题的测试要予以注意。

3. 高速水流中的掺气

水流速度较高(一般认为大于 15m/s)会挟有大量空气，成为掺气水流，致使其特性和运动规律发生变化。模型中各水力要素虽与原型相似，但流速小了若干倍，因而模型中无法产生掺气现象，这时相似就受到限制。

此外，如果原型水流具有表面波浪，模型中亦需要波浪再现时，为了克服表面张力的影响，则要求模型表面流速大于 23cm/s；水深太小，亦会影响流速与压强的分布，因此模型中最小水深应大于 1.5cm。设计模型时，应使流速、水深大于这些界限。

由此说明在进行水力模型试验时，除选定相似准则和推算相似比尺外，还要考虑有影响的各种物理因素，注意到试验模型反映天然物理过程所具有的局限性。

第五节　水力模型的分类

生产实践中需要通过水力模型试验解决的问题是多种多样的，因而提出的试验任务也就各不相同。按试验内容和要求的不同，或受场地条件的限制，试验中可采取不同类型的模型。常用的模型有以下几种：

一、按模型模拟的范围分类

(一)整体模型

包括整个水工建筑物或整个被研究对象的模型称为整体模型。如包括上下游河道的闸、坝枢纽模型。

(二)半整体模型

当建筑物较宽、且结构对称，由于实验场地或供水流量等条件限制而不能制作整体模型时，有时也可取其一半来制成模型，称为半整体模型。如进行孔数较多的溢流坝、水闸试验时往往采用此类模型。

(三)局部模型

为了更详细研究建筑物某个局部水流现象，取出建筑物中某个局部做成的模型，称为局部模型。如研究引水式水电站中动力渠道的涌波问题时，不需要研究坝区枢纽水流，往往只需选取动力渠道段制作模型。

(四)断面模型

当建筑物较宽，沿其宽度方向水流情况相近，这时可按平面问题进行处理，即在其宽度方向取出一小段制成模型，这种模型称为断面模型。如多孔水闸或溢流坝，可取其中一孔制成模型，并将其放在玻璃水槽内进行试验，研究坝面形状、过流能力、水流流态及消能措施等。

二、按床面的性质分类

(一)定床模型

在试验过程中河床边界固定不变的模型称为定床模型。研究一般水流运动状态时常采用此类模型。

(二)动床模型

为研究河床的冲淤演变、消能段的冲刷深度、范围，这时需要采用河床边界随水流运动不断改变的模型，称为动床模型。动床模型试验中需要同时研究水、沙运动，即要求水流运动相似及河床泥沙运动相似。

三、按模型的几何相似性分类

(一)正态模型

在空间三个方向采用相同的长度比尺，模型与原型完全几何

相似的模型称为正态模型。如实验室条件允许，应尽可能采用正态模型。当研究水利枢纽上下游水流、溢洪道泄流和显著弯曲的河渠问题等，一般均采用正态模型。

(二)变态模型

在空间三个方向采用不同长度比尺的模型称为变态模型。如在较长的河道或渠道试验中，受场地限制，要求缩短模型纵向长度；或在模型试验时，由于难以找到糙率较小的模型材料，但使用现有材料又会增大模型糙率，为使该模型水头损失保持相似，这时必须相应地缩短模型长度，因而采用的长度比尺与宽度、深度比尺不同，这就是纵向与横向、垂向比尺不同的变态模型；另一种情况是天然河道中的水流都处于紊流阻力平方区，而模型水流却往往无法达到，为保证阻力相似，如在模型设计时，采用长度、宽度比尺大于深度比尺的变态模型，这样可增加模型水流雷诺数，从而使模型水流有可能达到阻力平方区，这是纵向、横向与垂直方向比尺不同的变态模型。

不同方向长度比尺之比称为变态模型的变率，一般要求变率不超过5。由于变态模型与原型在几何上不完全相似，因此选择变态模型时必须慎重。水工建筑物和河道整治建筑物一般不采用变态模型。

习　题

18.1　两个力学相似的水流必须满足哪些条件？

18.2　水力模型试验中常见的相似准数有哪些？其意义如何，怎样表示？

18.3　何谓量纲？何谓单位？

18.4　基本量纲如何选取，怎样检查其独立性？

18.5　何谓有量纲数和无量纲数？无量纲数有哪些优点？

18.6　整理下列各组物理量成为无量纲数：

(1)τ、v、ρ；　　(2)$\Delta\rho$、v、g、ρ；

(3)F、L、v、ρ；　　(4)σ、L、v、ρ。

18.7　由实验观测得知量水堰的过堰流量 Q 与堰上水头 H_0、堰宽 b、重力加速度 g 之间存在一定的函数关系，试用瑞利法导出流量公式。

18.8　试用瑞利法推导管中液流的切应力 τ 的表达式。设切应力 τ 是管径 d、相对粗糙率 $\frac{\Delta}{d}$、液体密度 ρ、动力粘滞系数 μ 和流速 v 的函数，Δ 为绝对粗糙度。

18.9　用 π 定理推导文德里管流量公式。影响喉道处流速 v_2 的因素有：文德里管进口断面直径 d_1、喉道断面直径 d_2、水的密度 ρ、动力粘滞系数 μ 及两断面间压强差 Δp。（设该管水平放置）

18.10　运动粘滞系数 μ 为 $4.645\times10^{-5}\text{m}^2/\text{s}$ 的油，在粘滞力和重力均占优势的原型中流动，希望模型的长度比尺 $\lambda_l=5$，为同时满足重力和粘滞力相似条件，问模型液体运动粘滞系数应为多少？

18.11　有一单孔 WES 剖面混凝土溢流坝。已知坝高 $P_p=10\text{ m}$、坝上设计水头 $H_p=5\text{ m}$、流量系数 $m=0.502$、溢流孔净宽 $b_p=8\text{ m}$，在长度比尺 $\lambda_l=20$ 的模型上进行试验，要求：(1)计算模型流量；(2)如在模型坝趾测得收缩断面表面流速 $u_{vo_m}=4.46\text{m/s}$，计算原型的相应流速 u_{vo_p}；(3)求原型的流速系数 φ_p。

18.12　某溢流坝按长度比尺 $\lambda_l=25$ 设计一断面模型。模型坝宽 $b_m=0.61\text{ m}$，原型坝高 $P_p=11.4\text{ m}$，原型最大水头 $H_p=1.52\text{ m}$，问：(1)模型坝高和最大水头应为多少？(2)如果模型通过流量为 $0.02\text{m}^3/\text{s}$，问原型中单宽流量 q_p 为多少？(3)如果模型中出现跃高 $a_m=26\text{mm}$ 之水跃，问原型中水跃高度为多少？(4)如模型中水跃消能率为 112W，问原型水跃消能率为多少？

参考答案

第十章

10.1 $Q_1 = 0.484\ m^3/s$

$Q_2 = 0.415\ m^3/s$

10.2 $Q = 0.503\ m^3/s$

10.3 $a = 0.55m$

$B = 0.621\ m$

10.4 $Q = 0.032\ m^3/s$

10.5 略

10.6 略

10.7 $Q = 1913\ m^3/s$

10.8 $B = 54\ m$

10.9 $Q = 146.18\ m^3/s$

10.10 $Q = 350\ m^3/s$

10.11 $B = 8\ m$ $n = 2$

10.12 $Q = 51.95\ m^3/s$

10.13 $348.71\ m^3/s$

第十一章

11.1 略

11.2 略

11.3 $h_{co} = 0.215\ m$

$h_{co2} = 3.82\ m$

因为 $h_{co2} > h_t$

11.4 下游发生远离式水跃

11.5 $d = 0.6\ m$ $l = 27\ m$

11.6 $s = 2.52\ m$ $l = 26.1\ m$

11.7 $L_t = 14.06\ m$ $h_p = 6.9\ m$

第十二章

12.1 $K = 0.0173\ cm/s$

12.2 略

12.3 $q = 1.29 \times 10^{-3}\ cm^2/s$

12.4 $q = 1.12 \times 10^{-7}\ m^2/s$

12.5 $q = 1.08 \times 10^{-7}\ m^2/s$

$a_0 = 4.4\ m$

12.6 $Q = 0.041\ m^3/s$

12.7 $K = 1.24 \times 10^{-3}\ m/s$

12.8 $Q = 195.4\ m^3/s$

12.9 $\triangle h = 0.54\ m$

12.10 a 点地下水位 $Z = 4.6\ m$

12.11 $P = 329.97\ kN/m$

第十三章

13.1 略

13.2 略

13.3 略

13.4 略

13.5 铸铁管 $\triangle p_{max} = 1518\ kN/m^2$

钢管 $\triangle p_{max} = 1611\ kN/m^2$

13.6 略

13.7 $\triangle p_{max} = 11230\ kN/m^2$

13.8 $p_{max} = 735\ kN/m^2$

13.9 略

第十五章

15.1 $\sigma = 1.57$

15.2 略

15.3 $K = 0.01$

15.4 $h_{av} = 0.067$

第十六章

16.1 $d_m = 0.319$ mm

$d_{50} = 0.272$ mm

16.2 $S_t = 0.1 \quad S_G = 0.231$

$S = 2.646$ kN/m^3

16.3 $J = [gwn^{12/5}(\frac{S}{K})^{\frac{1}{m}}]^{-5/6}\sqrt{\frac{B}{Q}}$

16.4 泥沙推移到距坝 19.12 km 处,将停止推移。

第十七章

17.1 (1)深水推进波

(2) $\zeta_0 = 0.124$ m

(3) $T = 6.45$ s

$C = 10.07$ m/s;

(4) $r = 0.609$ m $\quad u = 0.593$ m/s

(5) $E = 1.256 \times 10^4$ J

17.2 (1)浅水推进波

(2) $\zeta_0 = 0.138$ m

(3) $T = 6.82$ s $\quad C = 9.53$ m/s

(4) $a_0 = 1.786$ m $\quad b_0 = 1.6$ m

(5) $u_{0max} = 1.646$ m/s

$u_{H_{max}} = 0.732$ m/s

(6) $H_c = 1.613$ m

17.3 (1) $\Delta p_{max} = 15.31$ kN/m^3;

$\Delta P_{max} = 109.3$ kN/m;

(2) $\Delta p_{min} = -11.94$ kN/m^3;

$\Delta P_{min} = -74.63$ kN/m

17.4 (1) $\Delta P_{max} = 181.52$ kN/m;

$\Delta P'_{max} = 45.03$ kN/m;

(2) $\Delta P_{min} = -103.9$ kN/m;

$\Delta P'_{min} = -44.88$ kN/m

第十八章

18.1 略

18.2 略

18.3 略

18.4 略

18.5 略

18.6 (1) $\tau = \pi\rho v^2$

(2) $\pi = \frac{\triangle p}{\rho v^2}$

(3) $\pi = \frac{F}{\rho v^2 L^2}$

(4) $\pi = \frac{v^2 L}{\sigma/\rho}$

18.7 $Q = mb\sqrt{2g} \quad H_0^{3/2}$

18.8 $\tau = R_e^{-d} \quad v^2 \quad \rho \quad K^r$

18.9 $Q = \mu A_2\sqrt{2\frac{\triangle p}{\rho}}$

式中: $A_2 = \frac{\pi}{4}d_2^2, \mu = f(\frac{d_2}{d_1}, R_e)$

18.10 $\nu_m = 4.15 \times 10^{-6}$ m^2/s

18.11 (1) $Q_m = 111$ l/s

(2) $v_{cop} = 19.92$ m/s

(3) $\varphi_p = 0.9$

18.12 (1) $a_m = 0.456$ m

$H_m = 0.061$ m

(2) $q_p = 4.1$ m^3/s

(3) $a_p = 0.65$ m

(4) $N_p = 875$ kW

15.2 略

15.3 $K = 0.01$

15.4 $h_{av} = 0.067$

第十六章

16.1 $d_m = 0.319$ mm

$d_{50} = 0.272$ mm

16.2 $S_t = 0.1 \quad S_G = 0.231$

$S = 2.646$ kN/m^3

16.3 $J = [gwn^{12/5}(\frac{S}{K})^{\frac{1}{m}}]^{-5/6}\sqrt{\frac{B}{Q}}$

16.4 泥沙推移到距坝 19.12 km 处,将停止推移。

第十七章

17.1 (1)深水推进波

(2) $\zeta_0 = 0.124$ m

(3) $T = 6.45$ s

$C = 10.07$ m/s;

(4) $r = 0.609$ m $\quad u = 0.593$ m/s

(5) $E = 1.256 \times 10^4$ J

17.2 (1)浅水推进波

(2) $\zeta_0 = 0.138$ m

(3) $T = 6.82$ s $\quad C = 9.53$ m/s

(4) $a_0 = 1.786$ m $\quad b_0 = 1.6$ m

(5) $u_{0max} = 1.646$ m/s

$u_{H_{max}} = 0.732$ m/s

(6) $H_c = 1.613$ m

17.3 (1) $\Delta p_{max} = 15.31$ kN/m^3;

$\Delta P_{max} = 109.3$ kN/m;

(2) $\Delta p_{min} = -11.94$ kN/m^3;

$\Delta P_{min} = -74.63$ kN/m

17.4 (1) $\Delta P_{max} = 181.52$ kN/m;

$\Delta P'_{max} = 45.03$ kN/m;

(2) $\Delta P_{min} = -103.9$ kN/m;

$\Delta P'_{min} = -44.88$ kN/m

第十八章

18.1 略

18.2 略

18.3 略

18.4 略

18.5 略

18.6 (1) $\tau = \pi\rho v^2$

(2) $\pi = \frac{\triangle p}{\rho v^2}$

(3) $\pi = \frac{F}{\rho v^2 L^2}$

(4) $\pi = \frac{v^2 L}{\sigma/\rho}$

18.7 $Q = mb\sqrt{2g} \quad H_0^{3/2}$

18.8 $\tau = R_e^{-d} \quad v^2 \quad \rho \quad K^r$

18.9 $Q = \mu A_2\sqrt{2\frac{\triangle p}{\rho}}$

式中: $A_2 = \frac{\pi}{4}d_2^2, \mu = f(\frac{d_2}{d_1}, R_e)$

18.10 $\nu_m = 4.15 \times 10^{-6}$ m^2/s

18.11 (1) $Q_m = 111$ l/s

(2) $v_{cop} = 19.92$ m/s

(3) $\varphi_p = 0.9$

18.12 (1) $a_m = 0.456$ m

$H_m = 0.061$ m

(2) $q_p = 4.1$ m^3/s

(3) $a_p = 0.65$ m

(4) $N_p = 875$ kW

15.2 略

15.3 $K = 0.01$

15.4 $h_{av} = 0.067$

第十六章

16.1 $d_m = 0.319$ mm

$d_{50} = 0.272$ mm

16.2 $S_t = 0.1 \quad S_G = 0.231$

$S = 2.646$ kN/m^3

16.3 $J = [gwn^{12/5}(\frac{S}{K})^{\frac{1}{m}}]^{-5/6}\sqrt{\frac{B}{Q}}$

16.4 泥沙推移到距坝 19.12 km 处,将停止推移。

第十七章

17.1 (1)深水推进波

(2) $\zeta_0 = 0.124$ m

(3) $T = 6.45$ s

$C = 10.07$ m/s;

(4) $r = 0.609$ m $\quad u = 0.593$ m/s

(5) $E = 1.256 \times 10^4$ J

17.2 (1)浅水推进波

(2) $\zeta_0 = 0.138$ m

(3) $T = 6.82$ s $\quad C = 9.53$ m/s

(4) $a_0 = 1.786$ m $\quad b_0 = 1.6$ m

(5) $u_{0max} = 1.646$ m/s

$u_{H_{max}} = 0.732$ m/s

(6) $H_c = 1.613$ m

17.3 (1) $\Delta p_{max} = 15.31$ kN/m^3;

$\Delta P_{max} = 109.3$ kN/m;

(2) $\Delta p_{min} = -11.94$ kN/m^3;

$\Delta P_{min} = -74.63$ kN/m

17.4 (1) $\Delta P_{max} = 181.52$ kN/m;

$\Delta P'_{max} = 45.03$ kN/m;

(2) $\Delta P_{min} = -103.9$ kN/m;

$\Delta P'_{min} = -44.88$ kN/m

第十八章

18.1 略

18.2 略

18.3 略

18.4 略

18.5 略

18.6 (1) $\tau = \pi\rho v^2$

(2) $\pi = \frac{\triangle p}{\rho v^2}$

(3) $\pi = \frac{F}{\rho v^2 L^2}$

(4) $\pi = \frac{v^2 L}{\sigma/\rho}$

18.7 $Q = mb\sqrt{2g} \quad H_0^{3/2}$

18.8 $\tau = R_e^{-d} \quad v^2 \quad \rho \quad K^r$

18.9 $Q = \mu A_2\sqrt{2\frac{\triangle p}{\rho}}$

式中: $A_2 = \frac{\pi}{4}d_2^2, \mu = f(\frac{d_2}{d_1}, R_e)$

18.10 $\nu_m = 4.15 \times 10^{-6}$ m^2/s

18.11 (1) $Q_m = 111$ l/s

(2) $v_{cop} = 19.92$ m/s

(3) $\varphi_p = 0.9$

18.12 (1) $a_m = 0.456$ m

$H_m = 0.061$ m

(2) $q_p = 4.1$ m^3/s

(3) $a_p = 0.65$ m

(4) $N_p = 875$ kW

15.2 略

15.3 $K = 0.01$

15.4 $h_{av} = 0.067$

第十六章

16.1 $d_m = 0.319$ mm

$d_{50} = 0.272$ mm

16.2 $S_t = 0.1 \quad S_G = 0.231$

$S = 2.646$ kN/m^3

16.3 $J = [gwn^{12/5}(\frac{S}{K})^{\frac{1}{m}}]^{-5/6}\sqrt{\frac{B}{Q}}$

16.4 泥沙推移到距坝 19.12 km 处,将停止推移。

第十七章

17.1 (1)深水推进波

(2) $\zeta_0 = 0.124$ m

(3) $T = 6.45$ s

$C = 10.07$ m/s;

(4) $r = 0.609$ m $\quad u = 0.593$ m/s

(5) $E = 1.256 \times 10^4$ J

17.2 (1)浅水推进波

(2) $\zeta_0 = 0.138$ m

(3) $T = 6.82$ s $\quad C = 9.53$ m/s

(4) $a_0 = 1.786$ m $\quad b_0 = 1.6$ m

(5) $u_{0max} = 1.646$ m/s

$u_{H_{max}} = 0.732$ m/s

(6) $H_c = 1.613$ m

17.3 (1) $\Delta p_{max} = 15.31$ kN/m^3;

$\Delta P_{max} = 109.3$ kN/m;

(2) $\Delta p_{min} = -11.94$ kN/m^3;

$\Delta P_{min} = -74.63$ kN/m

17.4 (1) $\Delta P_{max} = 181.52$ kN/m;

$\Delta P'_{max} = 45.03$ kN/m;

(2) $\Delta P_{min} = -103.9$ kN/m;

$\Delta P'_{min} = -44.88$ kN/m

第十八章

18.1 略

18.2 略

18.3 略

18.4 略

18.5 略

18.6 (1) $\tau = \pi\rho v^2$

(2) $\pi = \frac{\triangle p}{\rho v^2}$

(3) $\pi = \frac{F}{\rho v^2 L^2}$

(4) $\pi = \frac{v^2 L}{\sigma/\rho}$

18.7 $Q = mb\sqrt{2g} \quad H_0^{3/2}$

18.8 $\tau = R_e^{-d} \quad v^2 \quad \rho \quad K^r$

18.9 $Q = \mu A_2\sqrt{2\frac{\triangle p}{\rho}}$

式中: $A_2 = \frac{\pi}{4}d_2^2, \mu = f(\frac{d_2}{d_1}, R_e)$

18.10 $\nu_m = 4.15 \times 10^{-6}$ m^2/s

18.11 (1) $Q_m = 111$ l/s

(2) $v_{cop} = 19.92$ m/s

(3) $\varphi_p = 0.9$

18.12 (1) $a_m = 0.456$ m

$H_m = 0.061$ m

(2) $q_p = 4.1$ m^3/s

(3) $a_p = 0.65$ m

(4) $N_p = 875$ kW

15.2 略

15.3 $K = 0.01$

15.4 $h_{av} = 0.067$

第十六章

16.1 $d_m = 0.319$ mm

$d_{50} = 0.272$ mm

16.2 $S_t = 0.1 \quad S_G = 0.231$

$S = 2.646$ kN/m^3

16.3 $J = [gwn^{12/5}(\frac{S}{K})^{\frac{1}{m}}]^{-5/6}\sqrt{\frac{B}{Q}}$

16.4 泥沙推移到距坝 19.12 km 处,将停止推移。

第十七章

17.1 (1)深水推进波

(2) $\zeta_0 = 0.124$ m

(3) $T = 6.45$ s

$C = 10.07$ m/s;

(4) $r = 0.609$ m $\quad u = 0.593$ m/s

(5) $E = 1.256 \times 10^4$ J

17.2 (1)浅水推进波

(2) $\zeta_0 = 0.138$ m

(3) $T = 6.82$ s $\quad C = 9.53$ m/s

(4) $a_0 = 1.786$ m $\quad b_0 = 1.6$ m

(5) $u_{0max} = 1.646$ m/s

$u_{H_{max}} = 0.732$ m/s

(6) $H_c = 1.613$ m

17.3 (1) $\Delta p_{max} = 15.31$ kN/m^3;

$\Delta P_{max} = 109.3$ kN/m;

(2) $\Delta p_{min} = -11.94$ kN/m^3;

$\Delta P_{min} = -74.63$ kN/m

17.4 (1) $\Delta P_{max} = 181.52$ kN/m;

$\Delta P'_{max} = 45.03$ kN/m;

(2) $\Delta P_{min} = -103.9$ kN/m;

$\Delta P'_{min} = -44.88$ kN/m

第十八章

18.1 略

18.2 略

18.3 略

18.4 略

18.5 略

18.6 (1) $\tau = \pi\rho v^2$

(2) $\pi = \frac{\triangle p}{\rho v^2}$

(3) $\pi = \frac{F}{\rho v^2 L^2}$

(4) $\pi = \frac{v^2 L}{\sigma/\rho}$

18.7 $Q = mb\sqrt{2g} \quad H_0^{3/2}$

18.8 $\tau = R_e^{-d} \quad v^2 \quad \rho \quad K^r$

18.9 $Q = \mu A_2\sqrt{2\frac{\triangle p}{\rho}}$

式中: $A_2 = \frac{\pi}{4}d_2^2, \mu = f(\frac{d_2}{d_1}, R_e)$

18.10 $\nu_m = 4.15 \times 10^{-6}$ m^2/s

18.11 (1) $Q_m = 111$ l/s

(2) $v_{cop} = 19.92$ m/s

(3) $\varphi_p = 0.9$

18.12 (1) $a_m = 0.456$ m

$H_m = 0.061$ m

(2) $q_p = 4.1$ m^3/s

(3) $a_p = 0.65$ m

(4) $N_p = 875$ kW